MODUL : Getaran Mekanis

UNIVERSITAS HARAPAN MEDAN
Fakultas Teknik dan Komputer
2022

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Modul mata kuliah Getaran Mekanis(21-3-09-3-5-05-2) ini berhasil disusun dengan semaksimal mungkin. Modul ini disusun mengacu pada silabus mata kuliah yang diberlakukan untuk program S1 yang disajikan pada tiap semester dengan jumlah SKS 2 (Dua). Diktat ini diterbitkan untuk kalangan sendiri pada Program Teknik Mesin FAKULTAS TEKNIK DAN KOMPUTER UNIVERSITAS HARAPAN MEDAN .Penulis mengucapkan terimakasih atas suport dan masukan yang diberikan teman teman Dosen di Fakultas Teknik dan Komputer Universitas Harapan Medan, selama penyusunana Modul ini.

Modul mata kuliah Teknik Pengaturan ini diharapkan bisa membantu mahasiswa dalammemahami materi yang disampaikan Dosen. Dalam diktat ini menyajikan bermacam-macam contoh soal dan latihan soal dalam setiap BAB, yang mana mahasiswa diharapkan bisa memanfaatkan dengan baik untuk memperkuat pemahaman materi setiap BAB. Namun demikian, mahasiswa sebaiknya juga membaca buku-buku referensi yang lain tentang Perancangan Elemen Mesin (Machine Design) sehingga diperoleh informasi yang lebih lengkap dalam upaya memahami materi perkuliahan.

Bagaimanapun, diktat ini masih diperlukan perbaikan secara bertahap, oleh karena itu mohon kritik dan saran untuk kesempurnaan diktat ini.

Kami menyampaikan terimakasih kepada semua pihak yang membantu penulisan diktat ini. Semoga bermanfaat bagi pembaca.

Medan, Januari 2022

Penulis

(Ir.Junaidi,M.M.,M.T.)

NIDN :0103036301

BAB.I.PENDAHULUAN

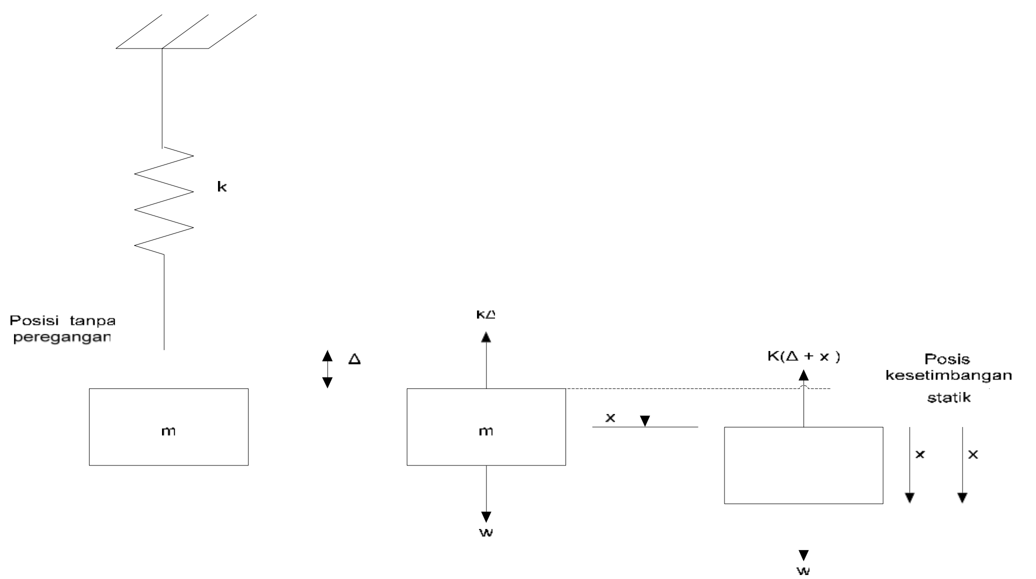
I.1.GETARAN MEKANIS

Getaran adalah gerakan bolak-balik dalam suatu interval waktu tertentu. Getaran berhubungan dengan gerak osilasi benda dan gaya yang berhubungan dengan gerak tersebut. Semua benda yang mempunyai massa dan elastisitas mampu bergetar, jadi kebanyakan mesin dan struktur rekayasa (engineering) mengalami getaran sampai derajat tertentu dan rancangannya biasanya memerlukan pertimbangan sifat osilasinya.

Ada dua kelompok getaran yang umum yaitu :

Getaran Bebas.

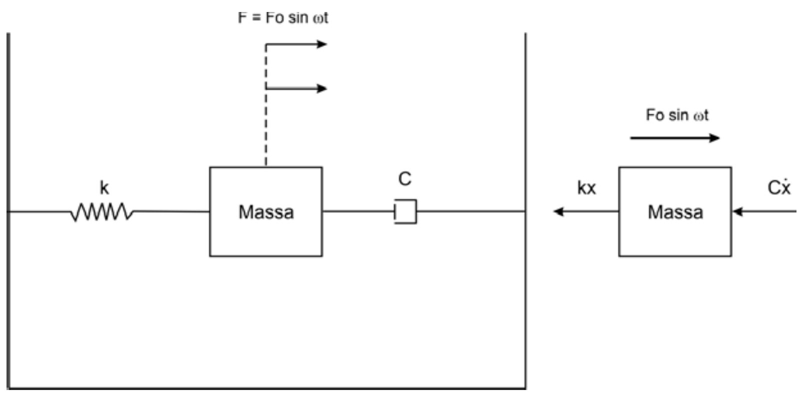
Getaran bebas terjadi jika sistem berosilasi karena bekerjanya gaya yang ada dalam sistem itu sendiri (inherent), dan jika ada gaya luas yang bekerja. Sistem yang bergetar bebas akan bergerak pada satu atau lebih frekuensi naturalnya, yang merupakan sifat sistem dinamika yang dibentuk oleh distribusi massa dan kekuatannya. Semua sistem yang memiliki massa dan elastisitas dapat mengalami getaran bebas atau getaran yang terjadi tanpa rangsangan luar.



Gambar. 1 Sistem Pegas – massa dan diagram benda bebas

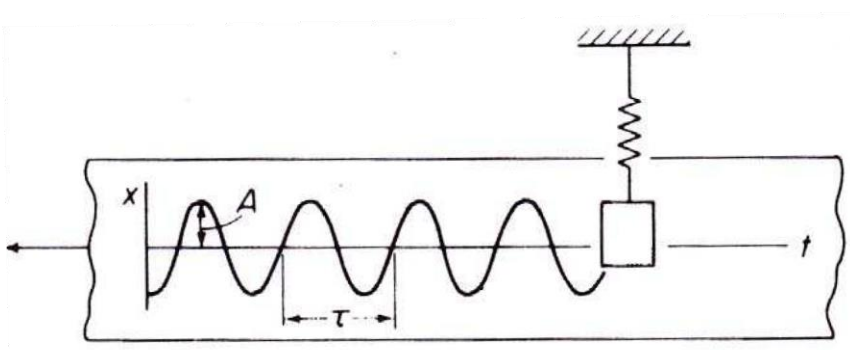
1.2.Getaran Paksa.

Getaran paksa adalah getaran yang terjadi karena rangsangan gaya luar, jika rangsangan tersebut berosilasi maka sistem dipaksa untuk bergetar pada frekuensi rangsangan. Jika frekuensi rangsangan sama dengan salah satu frekuensi natural sistem, maka akan didapat keadaan resonansi dan osilasi besar yang berbahaya mungkin terjadi. Kerusakan pada struktur besar seperti jembatan, gedungataupun sayap pesawat terbang, merupakan kejadian menakutkan yang disebabkan oleh resonansi. Jadi perhitungan frekuensi natural merupakan hal yang utama.



Gambar 2. Getaran paksa dengan peredam

1.3. Gerak Harmonik



Gambar 3. Rekaman Gerak Harmonik

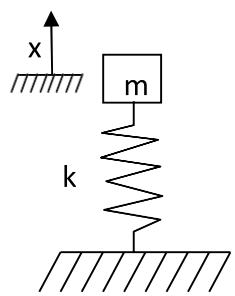
Gerak osilasi dapat berulang secara teratur atau dapat juga tidak teratur, jika gerak itu berulang dalam selang waktu yang sama maka gerak itu disebut gerak periodik. Waktu pengulangan tersebut disebut perioda osilasi dan kebalikannya disebut frekuensi. Jika gerak dinyatakan dalam fungsi waktu x (t), maka setiap gerak periodik harus memenuhi hubungan (t) = x (t + τ).

Prinsip D'Alembert

Sebuah alternatif pendekatan untuk mendapatkan persamaan adalah penggunaan Prinsip D'Alembert yang menyatakan bahwa sebuah sistem dapat dibuat dalam keadaan keseimbangan dinamis dengan menambahkan sebuah gaya fiktif pada gaya-gaya luar yang biasanya dikenal sebagai gaya inersia.

Persamaan Differential Gerak

Model fisik dari getaran bebas tanpa redaman dapat dilihat pada gambar dibawah ini:

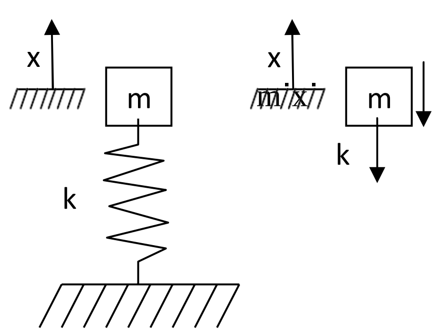


Gambar 4.: Model Fisik Sistem Getaran Bebas 1 DOF Tanpa Redaman

Dimana,

x	adalah simpangan
m	adalah massa
k	adalah konstanta pegas

Untuk mendapatkan model matematika dari model fisik di atas yaitu dengan dilakukan analisis diagram benda bebas (FBDA)



Gambar 5.: *Free Body Diagram Analysis*

(FBDA) pada Getaran Bebas 1 DOF Tanpa

Dimana,

kx adalah gaya pegas

$m\ddot{x}$ adalah gaya inersial

Dengan menggunakan persamaan kestimbangan gaya arah vertikal dapat dinyatakan model matematika dari sistem di atas adalah sebagai berikut:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Prinsip D'Alembert

Sebuah alternatif pendekatan untuk mendapatkan persamaan adalah penggunaan Prinsip D'Alembert yang menyatakan bahwa sebuah sistem dapat dibuat dalam keadaan keseimbangan dinamis dengan menambahkan sebuah gaya fiktif pada gaya-gaya luar yang biasanya dikenal sebagai gaya inersia.

Jawab persamaan differential gerak

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Misal jawab

x = A sin ωt + B cos ωt

$$\dot{x} = \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin \omega t - \omega^2 B \cos \omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$m\left(-\omega^2 x\right) + kx = 0$$

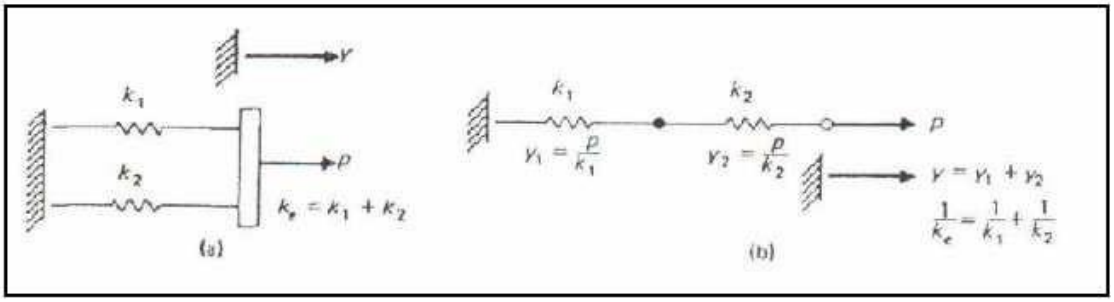
$$\left(k - m\omega^2\right)x = 0$$

Getaran terjadi, jika x # 0. oleh karena itu (k - mω^2) = 0 dan akibatnya

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \ (frekuensipribadi)$$

Pegas dipasang Seri atau Paralel

Pemasangan konstanta pegas ekivalen dari suatu sistem dapat dilakukan melalui dua cara yaitu paralel (gambar V.5(a)) dan seri (gambar V.5(b))



Gambar V.5. Kombinasi Pegas (a). Pegas Paralel; (b) Pegas Seri

Untuk dua pegas paralel, gaya P yang diperlukan untuk membuat perpindahan pada satu sistem adalah sebesar perkalian antara perpindahan dengan jumlah kedua konstanta pegas tersebut, sehingga besar kekakuan pegas total adalah :

$$k_e = k_1 + k_2$$

Atau secara umum, dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$k_e = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

dimana : n adalah jumlah pegas yang dipasang paralel

Sedangkan, untuk dua pegas terpasang seri, gaya P menghasilkan perpindahan total y dari ujung bebas pada susunan pegas sebesar :

Akibatnya, gaya yang diperlukan untuk membuat satu unit perpindahan (konstanta pegas ekivalen) diberikan oleh

$$y = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} \qquad k_e = \frac{P}{y}$$

Dengan mensubstitusi y dari persamaan ini ke dalam persamaan V.4, maka didapatkan nilai kebalikan dari konstanta pegas :

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Secara umum, konstanta pegas ekivalen yang terpasang seri

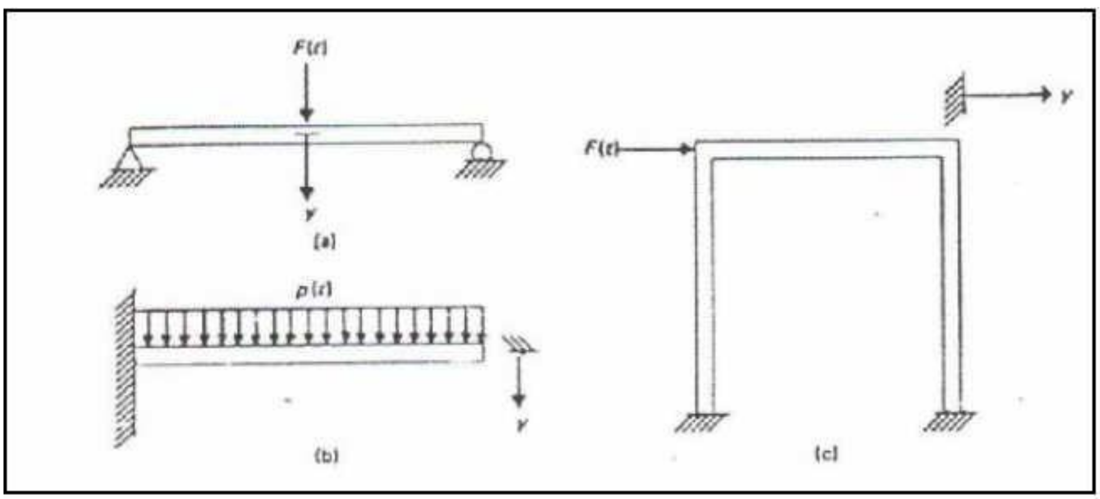
$$\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$$

dimana : n adalah jumlah pegas terpasang seri.

SISTEM DERAJAT KEBEBASAN TUNGGAL TAK TEREDAM

Umum

Dalam dinamika struktur, jumlah koordinat bebas (*independent coordinates*) diperlukan untuk menetapkan susunan atau posisi sistem pada setiap saat, yang berhubungan dengan jumlah derajat kebebasan (*degree of fredom*). Pada umumnya, struktur berkesinambungan (*continuous structure*) mempunyai jumlah derajat kebebasan (*number of degrees of fredom*) tak berhingga. Namun dengan proses idealisasi atau seleksi, sebuah model matematis yang tepat dapat mereduksi jumlah derajat kebebasan menjadi suatu jumlah diskrit dan untuk beberapa keadaan dapat menjadi berderajat kebebasan tunggal. Pada gambar V.1. terlihat beberapa contoh struktur yang dapat dianggap sebagai struktur berderajat kebebasan satu (*one degree of freedom*) dalam analisis dinamis, yaitu struktur yang dimodelisasikan sebagai sistem dengan koordinat perpindahan tunggal (single displacement coordinate).



Gambar V.1. Contoh Struktur yang Dimodelisasikan sebagai Sistem Derajat Kebebasan Tunggal

Sistem derajat kebebasan tunggal ini dapat dijelaskan secara tepat dengan model matematis seperti pada Gambar V.2, dimana memiliki elemen-elemen sebagai berikut :

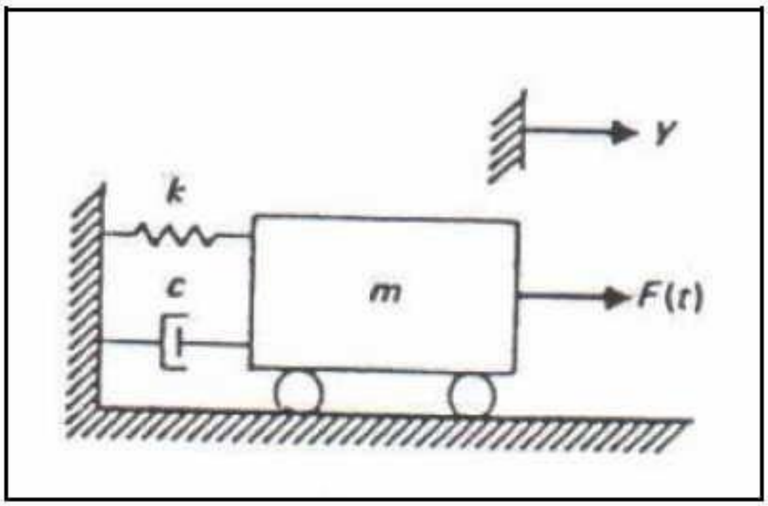
Elemen massa (m), menyatakan massa dan sifat inersia dari struktur.

Elemen pegas (k), menyatakan gaya balik elastis (*elastic restoring force*)dan kapasitas energi potensial dari struktur.

Elemen redaman (c), menyatakan sifat geseran dan kehilangan energi daristruktur.

Gaya pengaruh (F(t)), menyatakan gaya luar yang bekerja pada sistemStruktur

Dengan mengambil model matematis pada gambar V.2, dianggap bahwa tiap elemen



Gambar V.2. Model Matematis Sistem Derajat Kebebasan Tunggal

dalam sistem menyatakan satu sifat khusus, yaitu

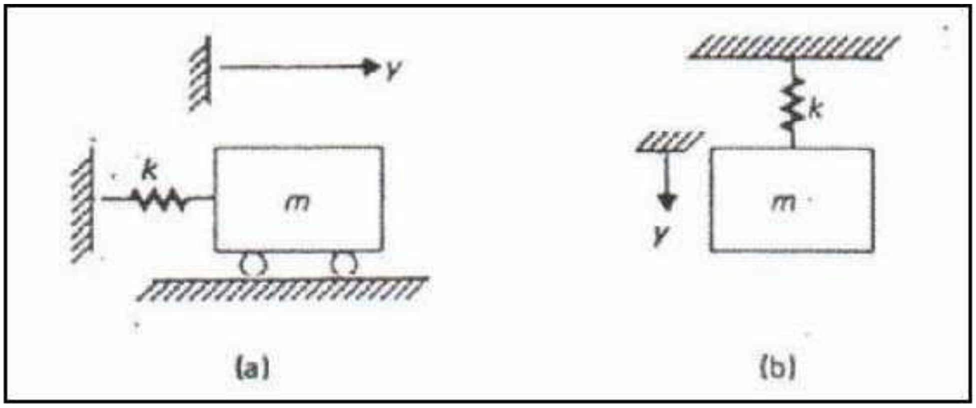
Massa (m), menyatakan sifat khusus inersia (property of inertia), bukan elastisitas atau kehilangan energi.

Pegas (k), menyatakan elastisitas, bukan inersia atau kehilangan energi.

Peredam (c), menyatakan kehilangan energi.

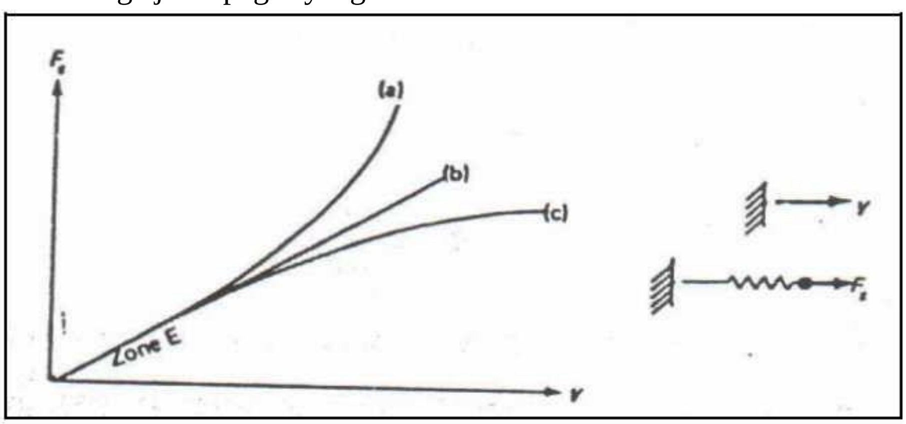
Sistem Tak Teredam (*Undamped System*)

Analisis sistem dasar yang sederhana dalam pembahasan dinamika struktur adalah sistem derajat kebebasan tunggal, dimana gaya geseran atau redaman diabaikan, dan sebagai tambahan, akan ditinjau sistem yang bebas dari gaya aksi gaya luar selama bergerak atau bergetar. Pada keadaan ini, sistem tersebut hanya dikendalikan oleh pengaruh atau kondisi yang dinamakan kondisi awal (initial conditions), yaitu perpindahan yang diberikan dalam kecepatan pada saat t=0, pada saat pembahasan dimulai. Sistem derajat kebebasan tunggal tak teredam sering dihubungkan dengan osilator sederhana tak teredam (*simple undamped oscillator*) yang selalu disajikan seperti gambar V.3 (a) dan V.3 (b) ataupun sebagai bentuk yang mirip dengan yang di atas.



Gambar V.3. Bentuk Alternatif Model Matematis Sistem Derajat Kebebasan Tunggal

Kedua gambar tersebut merupakan model matematis secara dinamis ekivalen.dan hanya tergantung pada pilihan perorangan saja dalam penggunaannya. Pada model ini massa m dihambat oleh pegas k dan bergerak menurut garis lurus sepanjang satu sumber koordinat. Karakteristik mekanis dari pegas digambarkan antara besar gaya Fs yang bekerja pada ujung pegas dengan hasil perpindahan y seperti terlihat pada Gambar V.4 yang menunjukkan secara grafik dari tiga jenis pegas yang berbeda.



Gambar V.4. Hubungan gaya dan perpindahan (a). Pegas Kuat; (b). Pegas Linear; (c). Pegas Lemah

Berdasarkan gambar V.4., karakteristik lengkungan (a) menyatakan sifat dari pegas kuat (hard spring), dimana gaya harus memberikan pengaruh lebih besar untuk suatu perpindahan yang disyaratkan seiring dengan terdeformasinya pegas. Sedangkan, karakteristik lengkungan (b), menyatakan sifat pegas linear, karena deformasinya selaras (proportional) dengan gaya dan gambar grafisnya mempunyai karakteristik garis lurus. Konstanta keselarasan antara gaya dan perpindahan dari pegas linier disebus konstanta pegas (*spring constant*), yang biasa dinyatakan dengan “k”, sehingga persamaan yang menyatakan hubungan antara gaya dan perpindahan pegas linier adalah sebagai berikut :

$$F_s = ky \text{ .... (V.1)}$$

Pegas dengan karakteristik lengkungan (c) pada gambar V.4 disebut pegas lemah, dimana pertambahan gaya untuk memperbesar perpindahan cenderung mengecil pada saat deformasi pegas menjadi makin besar.

Hukum Gerak Newton

Hubungan analitis antara perpindahan y dan waktu t, diberikan oleh Hukum Newton Kedua untuk gerak sebagai berikut :

$F = ma$

dimana : F : gaya yang bekerja pada partikel massa ma

: resultan percepatan

Persamaan V.8 dapat ditulis dalam bentuk ekivalen, dimana besaran komponennya menurut sumbu koordinat x, y dan z, yaitu :

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\sum F_z = ma_z$$

Percepatan didefinisikan sebagai turunan kedua vektor posisi terhadap waktu, yang berarti ketiga persamaan adalah persamaan differensial. Persamaan Hukum Newton dapat digunakan pada benda idealis seperti partikel yang bermassa tetapi tidak bervolume, tetapi juga dapat digunakan pada benda berdimensi yang bergerak. Benda kaku yang bergerak pada sebuah bidang adalah simetris terhadap bidang gerak (bidang x-z), sehingga mengakibatkan Hukum Newton perlu dimodifikasi menjadi :

$$\sum F_x = m(a_G)_x$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y$$

$$\sum M_G = I_G\alpha$$

$(a_G)_x, (a_G)_y$: komponen percepatan sepanjang sumbu x dan y dari pusat benda yang bermassa G

α : percepatan sudut

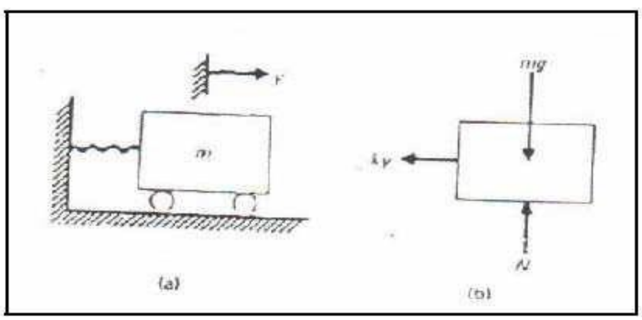
I_G : momen inersia massa benda terhadap sumbu melalui pusat massa G

$\sum M_G$: jumlah momen gaya yang bekerja pada benda terhadap sumbu melalui pusat massa G yang tegak lurus pada bidang x-y.

Diagram Benda Bebas

Digram Free Body adalah suatu sketsa dari benda yang dipisahkan dari benda lainnya, dimana semua gaya luar pada benda terlihat jelas. Pada Gambar V.6(b)

Mengilustrasikan Diagram Free Body dari massa osilator (m) yang dipindahkan pada arah positif menurut koordinat y, yang memberikan gaya pada pegas sebesar $F\ ky\ s$ = (asumsi pegas linier).



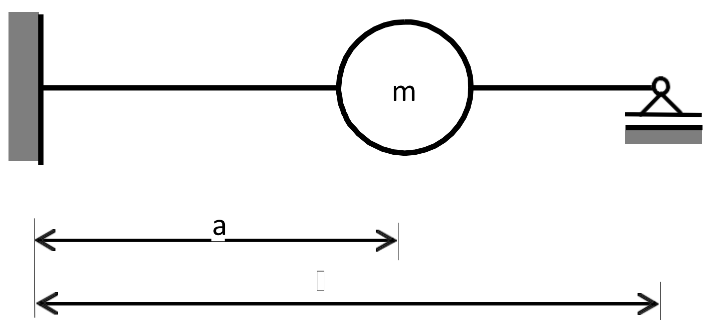
Gambar V.6. Diagram Free Body, (a). Sistem Derajat Kebebasan Tunggal; (b). Gaya-gaya Luar

Berat dari mg dan reaksi normal N dari permukaan penunjang diperlihatkan juga untuk pelengkap meskipun gaya-gaya ini bekerja pada arah vertikal dan tidak termasuk dalam persamaan gerak yang ditulis menurut arah y. Penggunaan Hukum Gerak Newton memberikan.

$$-ky = m\ddot{y}$$

Dimana gaya pegas bekerja pada arah negatif mempunyai tanda minus dan percepatan dinyatakan oleh $\ddot{y}$. Pada notasi ini, dua titik di atas menyatakan turunan kedua terhadap waktu dan satu titik menyatakan turunan pertama terhadap waktu, yaitu kecepatan.

Contoh : Sistem Massa Balok

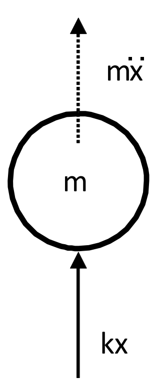


Lendutan pada massa m adalah:

$$\delta = \frac{Pa^3(\ell - a)^2}{12 \cdot EI \cdot \ell^3}(4\ell - a)$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{P \cdot 12EI \cdot \ell^3}{P \cdot a^3(\ell - a)^2(4\ell - a)} = \frac{12EI \cdot \ell^3}{a^3(\ell - a)^2(4\ell - a)}$$

Diagram benda bebas dari sistim adalah:



Dari persamaan kesetimbangan pada DBB diperoleh :

$$\sum F_y = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Misal jawab sistem adalah:

$$x = X \sin \omega t$$

$$\dot{x} = \omega X \cos \omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 X \sin \omega t$$

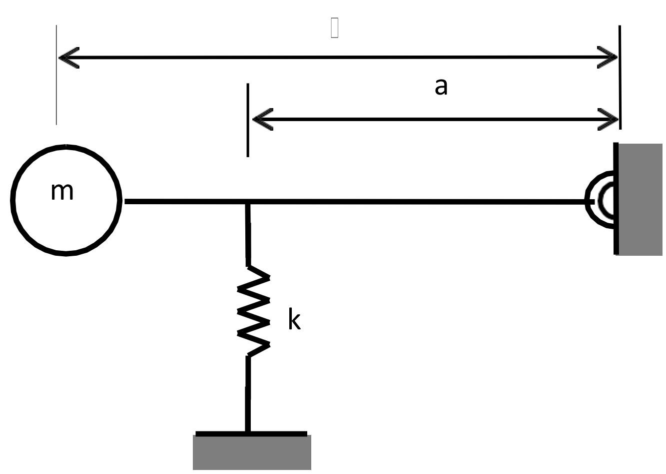
Apabila disubstitusikan ke PDG diperoleh:

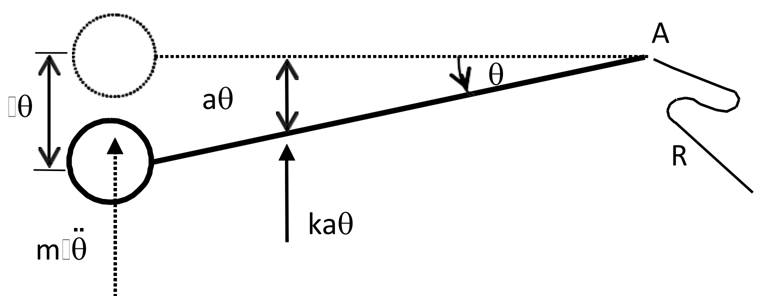
$$-m\omega^2 x + kx = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\;}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{12EI \cdot \ell^3}{\;}}$$

Contoh : Sistem Massa pegas.





$$\sum M_A = 0$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} + ka^2\theta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\theta = X \sin \omega t$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 X \sin \omega t$$

$$\left(-\omega^2 m\ell^2 + ka^2\right) X \sin \omega t = 0$$

$$-\omega^2 m\ell^2 + ka^2 = 0$$

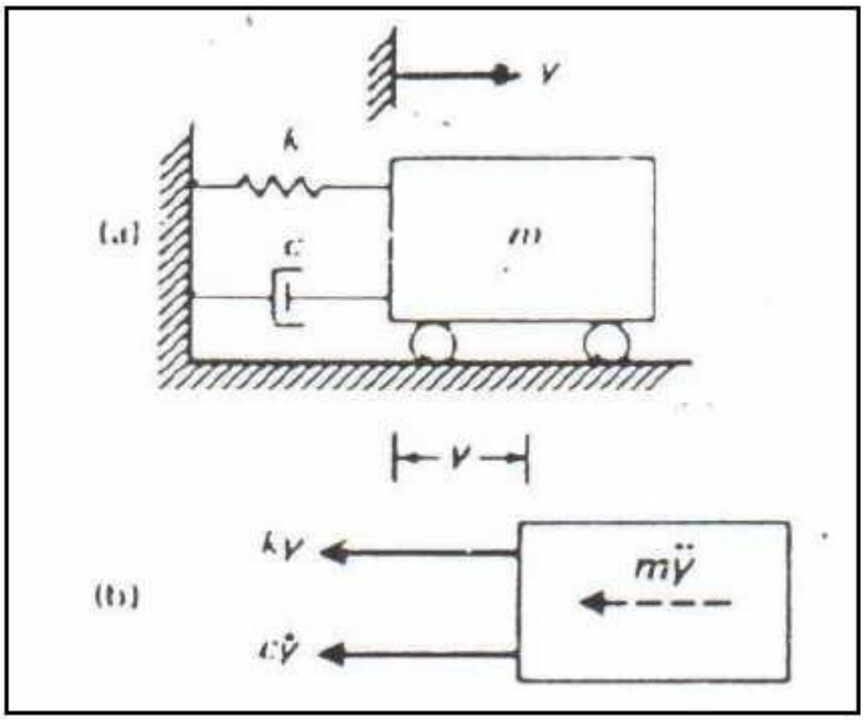
$\omega^2 m\ell^2 = ka^2$

$$\omega^2 = \frac{ka^2}{m\ell^2}$$

maka frekuensi pribadi sistem :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ka^2}{m\ell^2}}$$

Getaran Bebas dengan Redaman



Bila peredaman diperhitungkan, berarti gaya peredam juga berlaku pada massa selain gaya yang disebabkan oleh peregangan pegas. Bila bergerak dalam fluida benda akan mendapatkan peredaman karena kekentalan fluida. Gaya akibat kekentalan ini sebanding dengan kecepatan benda. Konstanta akibat kekentalan (viskositas) *c* ini dinamakan koefisien peredam, dengan satuan N s/m (SI)

$$F_d = -cv = -c\dot{x} = -c\frac{dx}{dt}$$

Dengan menjumlahkan semua gaya yang berlaku pada benda kita mendapatkanpersamaan

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

Solusi persamaan ini tergantung pada besarnya redaman. Bila redaman cukup kecil, sistem masih akan bergetar, namun pada akhirnya akan berhenti. Keadaan ini disebut kurang redam, dan merupakan kasus yang paling mendapatkan perhatian dalam analisis vibrasi. Bila peredaman diperbesar sehingga mencapai titik saat sistem tidak lagi berosilasi, kita mencapai titik **redaman kritis**. Bila peredaman ditambahkanmelewati titik kritis ini sistem disebut dalam keadaan lewat redam.

Nilai koefisien redaman yang diperlukan untuk mencapai titik redaman kritis pada model massa-pegas-peredam adalah:

$$c_c = 2\sqrt{km}$$

Untuk mengkarakterisasi jumlah peredaman dalam sistem digunakan nisbah yang dinamakan nisbah redaman. Nisbah ini adalah perbandingan antara peredaman

sebenarnya terhadap jumlah peredaman yang diperlukan untuk mencapai titik redaman kritis. Rumus untuk nisbah redaman (ζ) adalah

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}.$$

Sebagai contoh struktur logam akan memiliki nisbah redaman lebih kecil dari 0,05, sedangkan suspensi otomotif akan berada pada selang 0,2-0,3.

Solusi sistem kurang redam pada model massa-pegas-peredam adalah

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi), \quad \omega_n = 2\pi f_n$$

Nilai *X*, amplitudo awal, dan ϕ , ingsutan fase, ditentukan oleh panjang regangan pegas.

Dari solusi tersebut perlu diperhatikan dua hal: faktor eksponensial dan fungsi cosinus. Faktor eksponensial menentukan seberapa cepat sistem teredam: semakin besar nisbah redaman, semakin cepat sistem teredam ke titik nol. Fungsi kosinus melambangkanosilasi sistem, namun frekuensi osilasi berbeda daripada kasus tidak teredam.

Frekuensi dalam hal ini disebut "frekuensi alamiah teredam", f_d, dan terhubung dengan frekuensi alamiah takredam lewat rumus berikut.

$$f_d = \sqrt{1-\zeta^2} f_n$$

Frekuensi alamiah teredam lebih kecil daripada frekuensi alamiah takredam, namununtuk banyak kasus praktis nisbah redaman relatif kecil, dan karenanya perbedaan tersebut dapat diabaikan. Karena itu deskripsi teredam dan takredam kerap kali tidak disebutkan ketika menyatakan frekuensi alamiah.

Contoh 1.

Sebuah sistem bergetar terdiri dari berat W = 44.5 N dan pegas kekakuan k = 3504 N/m, dipengaruhi redaman liat (viscous damped) sehingga dua amplitudo puncak secara berurutan adalah 1.00 sampai 0.85. Tentukan :

Frekuensi natural dari sistem tak teredam

Pengurangan logaritmis (logarithmic decrement)(c).

rasio redaman (damping ratio)

koefisien redaman

frekuensi natural teredam

Penyelesaian :

(a). Frekuensi natural dari sistem tak teredam dalam radian per detik adalah :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{W/g}} = \sqrt{\frac{3504}{(44.5/9.81)}} = 27.79 \ \mathbf{rad/s}$$

Atau dalam putaran per detik

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{27.79}{2\pi} = 4.42 \ \mathbf{sps}$$

(b). Pengurangan logaritmis (logarithmic decrement)

$$\delta = \ln\frac{y_1}{y_2} = \ln\frac{1.00}{0.85} = 0.163$$

(c). rasio redaman (damping ratio)

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.163}{2\pi} = 0.026$$

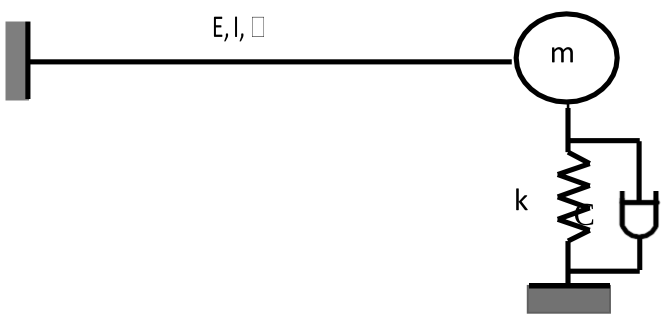
(d). koefisien redaman

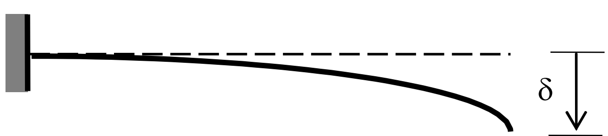
$$c = \xi\, c_{cr} = 0.026\left(2\ x\sqrt{3504\,x(44.5/\,9.81)}\right) = 6.55\ \text{N s/m}$$

(e). frekuensi natural teredam

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 27.79\sqrt{1-(0.026)^2} = 27.78\ rad\,/\,s$$

Contoh Soal :





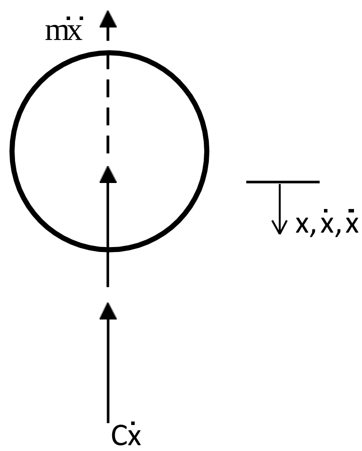
$$\delta = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

$$K_{batang} = \frac{3EI}{\ell^3}$$

sehingga $K_{skivalen}$

$$K = \frac{3EI}{\ell^3} + k$$

maka diagram benda bebas (DBB) adalah



persamaan gerak sistem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

asumsi

$$x = Ae^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}$$

$\ddot{x} = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$

dengan mensubsitusikannya ke persamaan gerak diperoleh

$\left(m\lambda^2 + c\lambda + K\right)Ae^{\lambda t} = 0$

$m\lambda^2 + c\lambda + K = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

$$= \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} \Rightarrow \text{pers. karakteristik}$$

untuk kondisi kritis :

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m} = 0 \quad \text{maka} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-c}{2m}$$

kondisi tanpa redaman : $m\ddot{x} + Kx = 0$

maka $\omega_n^2 = \frac{K}{m}$

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n = 0$$

$$\left(\frac{c}{2m} + \omega_n\right)\left(\frac{c}{2m} - \omega_n\right) = 0$$ maka : $\frac{c}{2m} = -\omega_n$ atau $\frac{c}{2m} = \omega_n$

(tidak dipakai)

redaman kritis : $c_c = 2m\omega_n = 2m\sqrt{\frac{3EI/\ell^3 + k}{}}$

koefisien redaman: $\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$

$$\frac{c}{2m} = \xi\omega_n$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{}}$$

$$= -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$= -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

pada kondisi redaman kritis : $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-c}{2m} = -\xi\omega_n$

jawab sistem : $x = A_1 e^{-\xi\omega_n t} + A_2 e^{-\xi\omega_n t}$
$= Ae^{-\xi\omega_n t}$

pada kondisi under damped : $\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2 < 0$

maka : $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{-1\left(\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2\right)}$

$$= -\xi\omega_n \pm \sqrt{-\omega_n^2\left(1 - \xi^2\right)}$$

$$= -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$ $\omega_d = \omega_n$

$$\sqrt{1-\xi^2}$$

jawab system : $x = A_1 e^{(-\xi\omega_n + i\omega_d)t} + A_2 e^{(-\xi\omega_n - i\omega_d)t}$

$$= \left(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\right) e^{-\xi\omega_n t}$$

$$= \left\{A_1\left(\cos\omega_d t + i\sin\omega_d t\right) + A_2\left(\cos\omega_d t - i\sin\omega_d t\right)\right\} e^{-\xi\omega_n t}$$

$$= \left[\left(A_1 + A_2\right)\cos\omega_d t + i\left(A_1 - A_2\right)\sin\omega_d t\right] e^{-\xi\omega_n t}$$

$$x = \left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right) e^{-\xi\omega_n t}$$

$$\dot{x} = \left\{\left(-A\sin\omega_d t + B\omega_d\cos\omega_d t\right) + \left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right) - \xi\omega_n\right\} e^{-\xi\omega_n t}$$

$$\dot{x} = \left[\left(B\omega_d - A\xi\omega_n\right)\cos\omega_d t + \left(-A\omega_d - B\xi\omega_n\right)\sin\omega_d t\right]e^{-\xi\omega_n t}$$

$$x = x_0 = A$$

$$t=0 \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = B\omega_d - A\xi\omega_n \qquad B = \frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega_n}{\omega_d}$$

$$\dot{x}_0 = B\omega_d - x_0\xi\omega_n$$

sehingga : $x = e^{-\xi\omega_n t}\left(x_0 \cos\omega_d t + \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega_n}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right)$

SISTEM 2 DERAJAT KEBEBASAN (2DOF - MK)

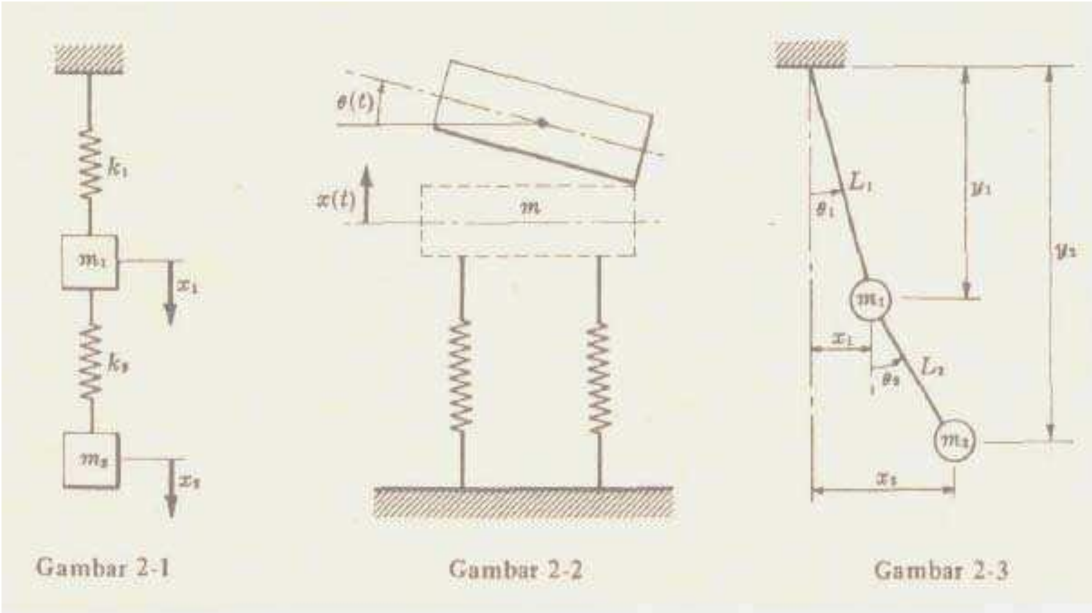
PENDAHULUAN

Sistem yang membutuhkan dua buah koordinat bebas untuk menentukan kedudukannya disebut sistem dua-derajat-kebebasan. Sistem dua-derajat-kebebasan dibagi atas tiga sistem yaitu :

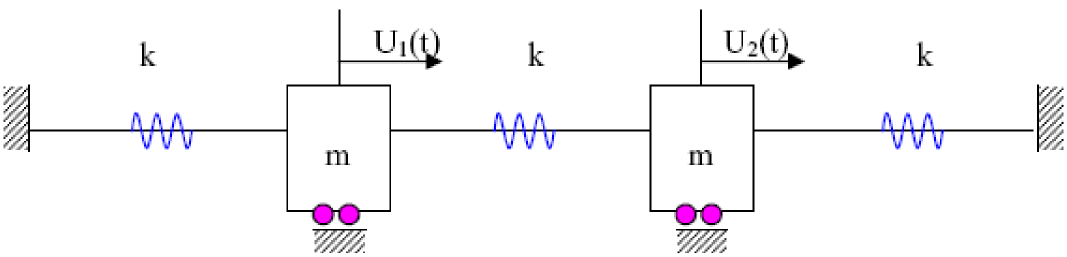
Dalam sistem massa pegas seperti terlihat dalam Gambar 2-1 di bawah ini, bila gerakan massa *ml* dan *m2* secara vertikal dibatasi maka paling sedikit dibutuhkan satukoordinat *x(t)* guna menentukan kedudukan massa pada berbagai waktu. Berarti sistem membutuhkan dua buah koordinat bersama-sama untuk menentukan kedudukan massa; sistem ini adalah sistem dua-derajat-kebebasan.

Bila massa *m* ditumpu dengan dua buah pegas yang sama seperti terlihat dalam Gam-bar 2-2 di bawah ini gerakannya dibatasi secara vertikal, maka dibutuhkan dua buah koordinat untuk menentukan konfigurasi sistem. Salah satu konfigurasi ini merupakan perpindahan lurus, seperti perpindahan massa x(/). Koordinat yang lain yaitu perpin-dahan sudut, *8(t),* yang mengukur rotasi massa. Ke dua koordinat ini satusama lain bebas; oleh karena itu sistem ini adalah sistem dua derajat kebebasan.

Untuk p.endulum ganda seperti terlihat dalam Gambar 2-3 di bawah ini, jelas bahwa untuk menentukan posisi massa *m1* dan *m2* pada berbagai waktu dibutuhkan dua buahkoordinat dan sistem adalah dua derajat kebebasan. Tetapi x1 dan *x2* atau y1 dan *y2,* atau θ1 dan θ*2,* mungkin merupakan kelompok koordinat sistem ini.



Controh diketahui sistem dua derajat kebebasan berikut :



Diketahui massa =10 kg, konstanta pegas =30 N/m.

Tentukan persamaan gerak sistem den gan memanfaatkan metode Lagrange!

Carilah frekuensi pribadinya

Tentukan rasio amplitudonya

Analisislah persamaan geraknya

Apabila massa sebelah kiri bergerak 1meter dari kedudukan setimbang statis dan kemudian dilepaskan, maka tentukan perpindahan massa u 1(t) dan u2(t)

Solusi

Persamaan umum Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial[Ek]}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial[Ek]}{\partial q_i}+\frac{\partial[Ed]}{\partial\dot{q}_i}+\frac{\partial[Ep]}{\partial q_i}=Q_i$$

Ek adalah energi kinetik(akibat gerakan massa);

Ep adalah energi potensial pegas(akibat kerja pegas);

Ed adalah energi terbuang sistem(akibat kerja redaman); Kasus ini *Ed* = 0

Qi adalah gaya luar yg bekerja pada sistem (eksitasi) ; Kasus ini *Qi* □ 0

a. Untuk kasus di atas merupakan 2 derajat kebebasan, sehingga persamaan umum Lagra ngedapat dibuat menjadi 2 bentuk, yaitu penurunan terhadap u $_1$(t) dan u_2(t).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial[Ek]}{\partial\dot{u}_1}-\frac{\partial[Ek]}{\partial u_1}+\frac{\partial[Ep]}{\partial u_1}=0 \quad \text{[2]}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial[Ek]}{\partial\dot{u}_2}-\frac{\partial[Ek]}{\partial u_2}+\frac{\partial[Ep]}{\partial u_2}=0 \quad \text{[3]}$$

dengan

$$Ek=\frac{1}{2}m\dot{u}_1{}^2+\frac{1}{2}.m\dot{u}_2{}^2 \quad \text{[4]}$$

$$Ep=\frac{1}{2}ku_1{}^2+\frac{1}{2}k(u_1-u_2)^2+\frac{1}{2}ku_2{}^2 \quad \text{[5]}$$

Persamaan 4 dan 5 masuk ke pers 2, maka

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left[\frac{1}{2}m\dot{u}_1{}^2+\frac{1}{2}m\dot{u}_2{}^2\right]}{\partial\dot{u}_1}-\frac{\partial\left[\frac{1}{2}m\dot{u}_1{}^2+\frac{1}{2}m\dot{u}_2{}^2\right]}{\partial u_1}+\frac{\partial\left[\frac{1}{2}ku_1{}^2+\frac{1}{2}k(u_1-u_2)^2+\frac{1}{2}ku_2{}^2\right]}{\partial u_1}=0 \quad \text{[6]}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m.2\dot{u}_1{}^1\right]-0+\left[\frac{1}{2}k.2u_1{}^1+\frac{1}{2}k.2(u_1-u_2)^1\right]=0 \quad \text{[7]}$$

$$m.\ddot{u}_1+ku_1+k(u_1-u_2)=0 \quad \text{[8]}$$

$$m.\ddot{u}_1+2ku_1-ku_2=0 \quad \text{[9]}$$

Persamaan 4 dan 5 masuk ke pers 3, maka

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left[\frac{1}{2}m\dot{u}_1{}^2+\frac{1}{2}m\dot{u}_2{}^2\right]}{\partial\dot{u}_2}-\frac{\partial\left[\frac{1}{2}m\dot{u}_1{}^2+\frac{1}{2}m\dot{u}_2{}^2\right]}{\partial u_2}+\frac{\partial\left[\frac{1}{2}ku_1{}^2+\frac{1}{2}k(u_1-u_2)^2+\frac{1}{2}ku_2{}^2\right]}{\partial u_2}=0 \quad \text{[10]}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m.2\dot{u}_2{}^1\right]-0+\left[-\frac{1}{2}k.2(u_1-u_2)^1+\frac{1}{2}k.2u_2{}^1\right]=0 \quad \text{[11]}$$

$$m\ddot{u}_2-k(u_1-u_2)+ku_2=0 \quad \text{[12]}$$

$$m\ddot{u}_2-ku_1+2ku_2=0 \quad \text{[13]}$$

Pers 9 dan 13 jika diurutkan sbb

Persamaan gerak 1 $\quad m.\ddot{u}_1+2ku_1-ku_2=0$ .... [14]

Persamaan gerak 2 $\quad m\ddot{u}_2-ku_1+2ku_2=0$ .... [15]

b. Andaikan gerakan adalah periodik dan terdiri dari gerakan h armonis dari berbagai amplitudo dan frekuensi. Ambil suatu contoh $u = A\sin(\omega t + \psi)$. Dari persamaan 14,15 dan dengan memisalkan

Simpangan	$u_1 = A\cos(\omega t + \psi)$	$u_2 = B\cos(\omega t + \psi)$
Kecepatan	$\dot{u}_1 = -A\omega\sin(\omega t + \psi)$	$\dot{u}_2 = -B\omega\sin(\omega t + \psi)$
Percepatan	$\ddot{u}_1 = -A\omega^2\cos(\omega t + \psi)$	$\ddot{u}_2 = -B\omega^2\cos(\omega t + \psi)$

Diperoleh

$$-m\omega^2 A\cos(\omega t + \psi) + 2kA\cos(\omega t + \psi) - kB\cos(\omega t + \psi) = 0 \quad [16]$$

$$-m\omega^2 B\cos(\omega t + \psi) - kA\cos(\omega t + \psi) + 2kB\cos(\omega t + \psi) = 0 \quad [17]$$

$$(2k - m\omega^2)A - kB = 0 \quad [18]$$

$$-kA + (2k - m\omega^2)B = 0 \quad [19]$$

Pers 18 dan 19 bisa dijadikan satu

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = 0 \quad [20]$$

Nilai A dan B ada jika Determinan = 0

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad [21]$$

$$(2k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - (-k)^2 = 0 \quad [22]$$

$$(4k^2 - 2km\omega^2 - 2km\omega^2 + m^2\omega^4) - k^2 = 0 \quad [23]$$

$$(m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2) = 0 \quad [24]$$

$$\omega_{1,2}^{\ 2} = +\frac{4km}{2m^2} \pm \frac{\sqrt{(-4km)^2 - 4m^2.3k^2}}{2m^2} \quad [25]$$

$$\omega_{1,2}^{\ 2} = +\frac{2k}{m} \pm \sqrt{\frac{16k^2m^2 - 12k^2m^2}{4m^4}} \quad [26]$$

$$\omega_{1,2}^{\ 2} = +\frac{2k}{m} \pm \frac{k}{m} \qquad [27]$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30}{10}} = \sqrt{3}\,\frac{rad}{s} \qquad [28]$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{3.30}{10}} = 3\,\frac{rad}{s} \qquad [29]$$

c. Rasio amplitudo ditentukan dari pers 18 dan 19

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k}{\left(2k - m\omega_1^{\ 2}\right)} = \frac{30}{2.30 - 10.\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1 \qquad [30]$$

atau

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{\left(2k - m\omega_1^{\ 2}\right)}{k} = \frac{2.30 - 10.\left(\sqrt{3}\right)^2}{30} = 1 \qquad [31]$$

sedangkan

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{k}{\left(2k - m\omega_2^{\ 2}\right)} = \frac{30}{2.30 - 10.3^2} = -1 \qquad [32]$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{\left(2k - m\omega_2^{\ 2}\right)}{k} = \frac{2.30 - 10.3^2}{30} = -1 \qquad [33]$$

d. Penyelesaian umum persamaan gerakan terdiri dua gerakan harmonis dengan frekuensi ω_1 dan ω_2. Oleh karena itu gerakan massa dinyatakan

$$u_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) = A_1 \cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) + A_2 \cos(3t + \psi_2) \qquad [34]$$

$$u_2(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) = B_1 \cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) + B_2 \cos(3t + \psi_2) \qquad [35]$$

Dari pers 30 dan 32 diperoleh $A_1=B_1$ sedangkan $A_2=-B_2$, sehingga pers 34 dan 35 menjadi

$$u_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) + A_2 \cos(3t + \psi_2) \qquad [36]$$

$$u_2(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) - A_2 \cos(3t + \psi_2) \qquad [37]$$

e. Ke empat konstanta pers 36 dan 37 dievaluasi dengan empat buah kondisi awal, yaitu $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$, $\dot{u}_1(0) = 0$, dan $\dot{u}_2(0) = 0$. Untuk $\psi_1 = \psi_2 = 0$ maka

$$u_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) + A_2 \cos(3t + \psi_2) \qquad [38]$$

$1 = A_1 \cos 0 + A_2 \cos 0$, shg $1 = A_1 + A_2$

$$u_2(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) - A_2 \cos(3t + \psi_2) \qquad [39]$$

$0 = A_1 \cos 0 - A_2 \cos 0$, shg $A_1 = A_2$

$$\dot{u}_1(t) = -A_1 \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) - A_2 3 \sin(3t + \psi_2) \qquad [40]$$

$0 = -A_1 \sqrt{3} \sin 0 - A_2 3 \sin 0$

$$\dot{u}_2(t) = -A_1 \sqrt{3} \sin\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) + A_2 3 \sin(3t + \psi_2) \qquad [41]$$

$0 = -A_1 \sqrt{3} \sin 0 + A_2 3 \sin 0$

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2} \qquad [42]$$

Maka gerakan massa adalah

$$u_1(t) = \frac{1}{2} \cos \sqrt{3}t + \frac{1}{2} \cos 3t \qquad [43]$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} \cos \sqrt{3}t - \frac{1}{2} \cos 3t \qquad [44]$$

Penggandengan Koordinat (ringkasan)

Persamaan gerak sistem dua derajat kebebasan biasanya gandeng (coupled) artinya kedua koordinat muncul dalam stiap persamaan gerak (diverensial).

Massa penggandengan dinamik ada bila matrik massa adalh non diagonal. Penggandengan statik ada bila matrik kekakuan adalah non-diagonal.

Contoh matrik penggandengan dinamik

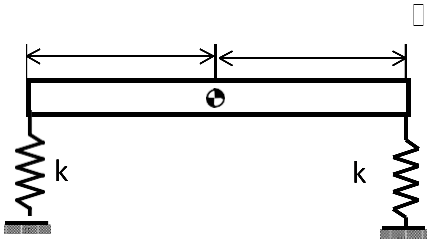
$$\begin{bmatrix} m & me \\ m & me^2 + I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

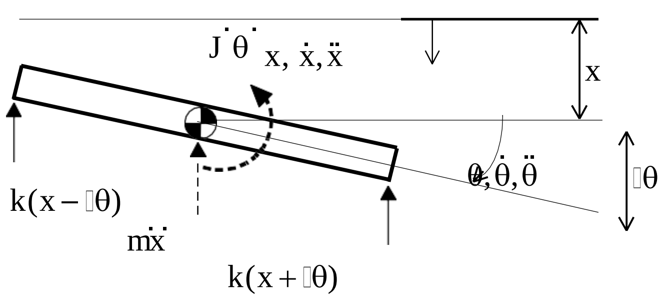
Dapat dicari suatu sistem koordinat yang sama sekali tidak mempunyai salah satu bentuk penggandengan. Setiap persamaan dapat dipecahkan tanpa tergantung pada persamaan lain. Koordinat semacam ini dinamai koordinat utama (proncipal koordinat) atau normat koordinat).

Pada sistem dengan redaman

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Bila $C_{12} = C_{21} = 0$, maka redaman dikatakan sebanding (dengan matrik kekakuan atau matrik massa) dan persamaan menjadi tak gandeng.





Bila $\ell_1 \neq \ell_2$ dapat terjadi penggandengan statik atau dinamik.

Penggandengan Statik

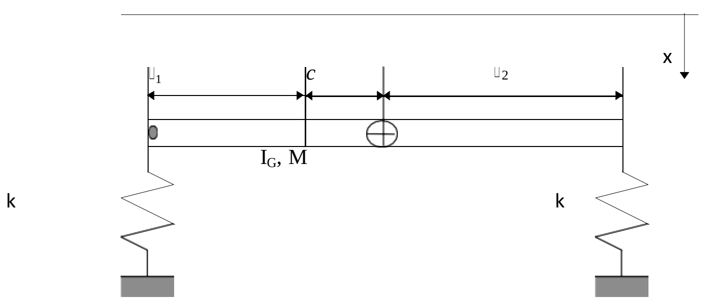
Dengan memilih koordinat x dan θ , yang ditunjukkan dalam gambar diatas makaterbentuk persamaan matrik

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2 l_2 - k_1 l_1) \\ (k_2 l_2 - k_1 l_1) & (k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Bila $k_1 l_1 = k_2 l_2$ maka penggandengan akan hilang dan diperoleh getaran dengan x dan

θ yang tak gandeng.

Penggandengan Dinamik



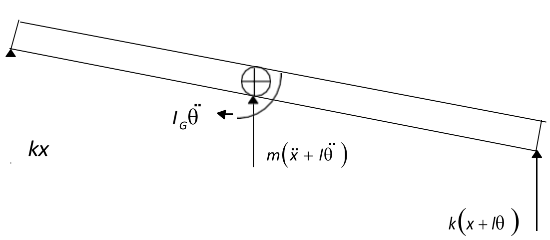
Bila $k_1 l_3 = k_2 l_4$ maka persamaan gerak yang diperoleh

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & Jc \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & 0 \\ 0 & (k_1 l_3^2 - k_2 l_4^2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Penggandengan Statik dan Dinamik

Bila ujung batang dipilih $x = x_1$ maka akan diperoleh bentuk matrik persamaan gerak

$$\begin{bmatrix} m & m\ell_1 \\ m\ell_1 & J_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & k_2\ell_2 \\ k_2\ell_2 & k_2\ell_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\}$$



Contoh Soal

Tentukan ragam normal getaran mobil yang disimulasi oleh sistem dua derajat kebebasanyang disederhanakan dengan nilai-nilai numerik sebagai berikut :

W = 3220 lb = 14,3 kN

l_1 = 4,5 ft = 1,35 m

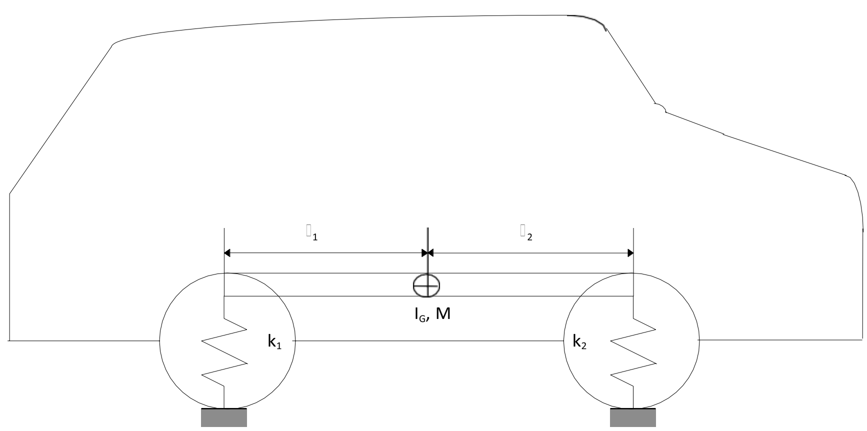
l_2 = 5,5 ft = 1,65 mr

= 4 ft = 1,2 m

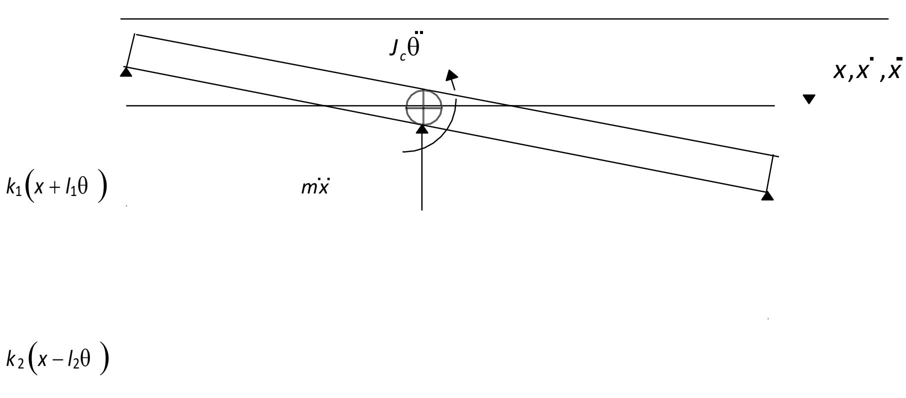
$J = \frac{W}{g} r^2{}_c$

k_1 = 2400 lb ft = 35,2 x10^3 kN m k

= 2600 lb ft = 38,13x10^3 kN m



Persamaan gerak dari sistem



$\sum F_x = 0 \quad m\ddot{x} + k_1\left(x - l_1\theta\right) + k_2\left(x + l_2\theta\right) = 0$

$\sum M_0 = 0 \quad J_c\ddot{\theta} - k_1\left(x - l_1\theta\right)l_1 + k_2\left(x + l_2\theta\right)l_2 = 0$ dengan asumsi jawab

$\ddot{x} = -X\omega^2 \sin\omega t$

$\ddot{\theta} = -\theta\omega^2 \sin\omega t$

Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} \left(k_1 + k_2 - \omega^2 m\right) & -\left(k_1 l_1 - k_2 l_2\right) \\ -\left(k_1 l_1 - k_2 l_2\right) & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 - \omega^2 J_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \left(k_1 + k_2 - \omega^2 m\right) & -\left(k_1 l_1 - k_2 l_2\right) \\ -\left(k_1 l_1 \quad k_2 l_2\right) & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 - \omega^2 J_c \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m\right)\left(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 - \omega^2 J_c\right) - \left(k_1 l_1 \quad k_2 l_2\right)\left(k_1 l_1 \quad k_2 l_2\right) = 0$$

dengan memasukkan nilai-nilai yang diketahui kedalam persamaan diatas diperoleh

$\omega_1 = 6{,}90 \text{ rad/det}$

$\omega_2 = 9{,}06 \text{ rad/det}$

Ratio amplitudo

$\left(\frac{X}{\theta}\right)_{\omega_1} = -14{,}6 \text{ ft/rad} = 0{,}0765 \text{ m/derajat} = 76 \text{ mm/derajat}$

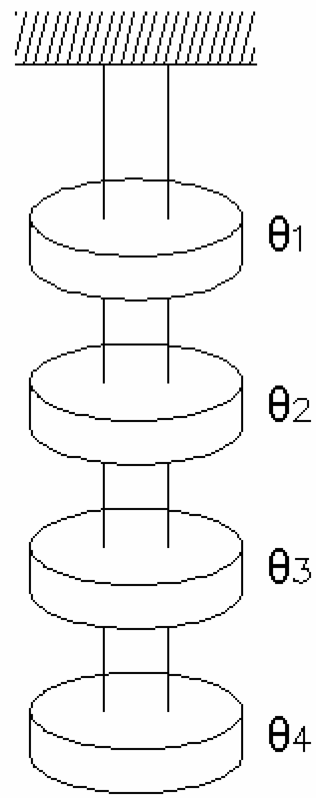
$\left(\frac{X}{\theta}\right)_{\omega_2} = 1{,}69 \text{ ft/rad} = 0{,}0072 \text{ m/derajat} = 7{,}2 \text{ mm/derajat}$

SISTEM BANYAK DERAJAT KEBEBASAN

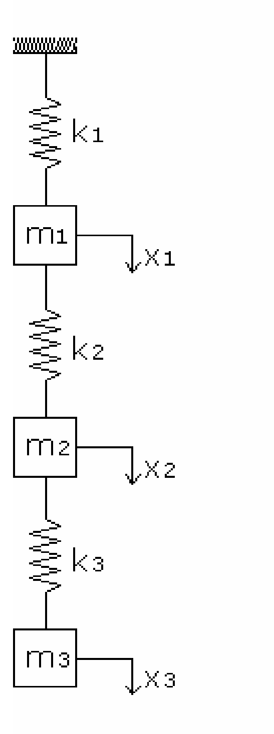
Sistem banyak derajat kebebasan adalah sebuah system yang mempunyai koordinat bebas untuk mengetahui kedudukan massa lebih dari dua buah.

Pada dasarnya, analisa system banyak derajat kebebasan adalah sama dengan system satu atau dua derajat kebebasan. Tetapi karena banyaknya langkah yang harus dilewati untuk mencari frekuensi pribadi melalui perhitungan matematis, maka system digolongkan menjadi banyak derajat kebebasan.

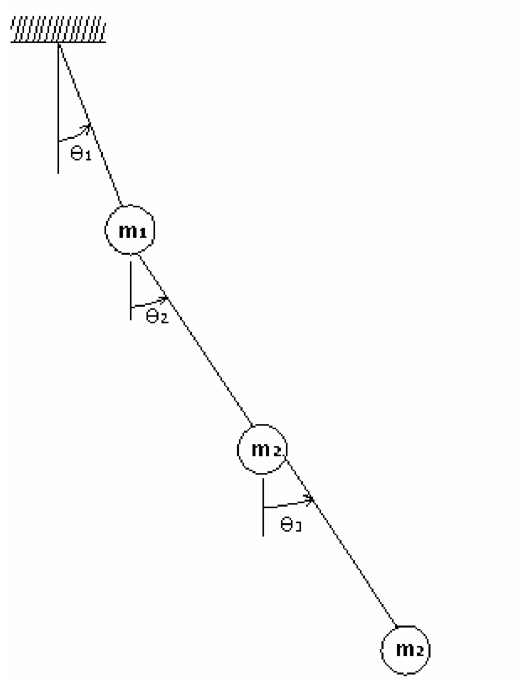
Berikut adalah contoh macam-macam System Banyak Derajat Kebebasan:



Gambar 1. Sistem Torsi 4 Derajat Kebebasan



Gambar 2. Sistem Pegas Massa 3 Derajat Kebebasan.



Gambar 3. Sistem Pendulum 3 Derajat Kebebasan.

FREKUENSI ALAMI SEBUAH STRUKTU

(Penerapan Metode *Logarithmic Decrement*)Tujuan Percobaan

Menentukan faktor redaman dan frekuensi alami sebuah struktur.

Alat-Alat Yang Digunakan

Accelerator “RION” PV-34

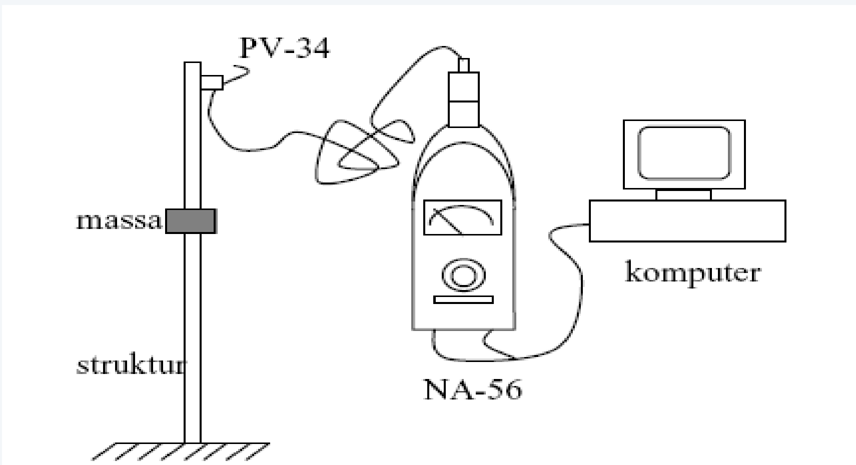
Sound Level Meter “RION” NA-56

Model struktur pelat logam dengan massa tambahan yg posisinya dapat diubah -ubah

Model struktur pelat kayu

Personal Computer dengan software PC-SCOPE

Skema susunan alat-alat dalam percobaan ini adalah:



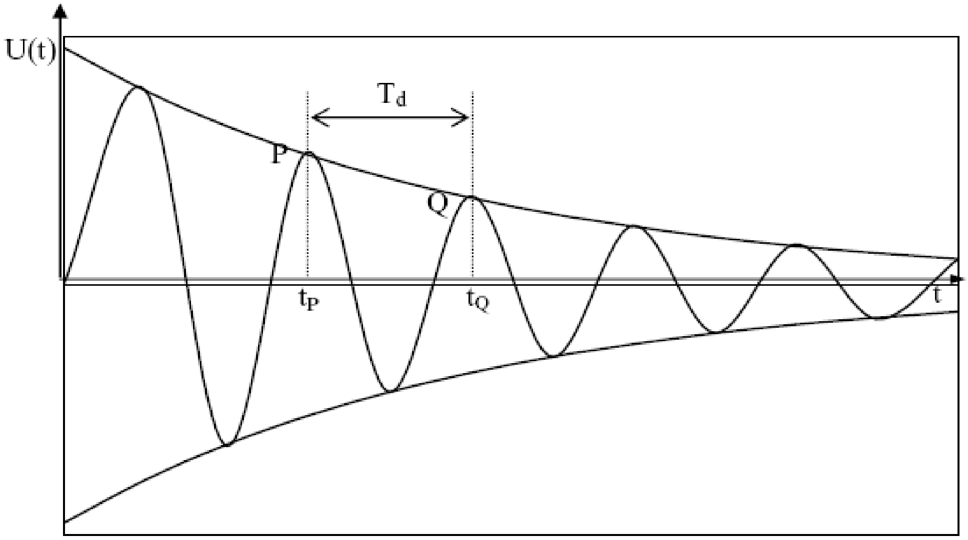
Mekanisme percobaan

Mekanisme percobaan dilakukan dengan menggetarkan batang logam dengan tangan (secara manual) sehingga data yang diperlukan muncul pada layar komputer (lihat gambar). Posisi massa pemberat diubah-ubah pada jarak tertentu dari posisi pencekam pelat logam, sedangkan percobaan pada pelat kayu tidak diberi massa pemberat.

Dasar Teori

Sebuah struktur bergetar dengan redaman kurang dari redaman kritis akan melakukan gerak getar yang persamaan geraknya dapat diungkapkan dengan persamaan yang melukiskan hubungan simpangannya dengan selang waktu, yaitu:

$$U(t) = Ue^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \alpha)$$



Periode dirumuskan sebagai berikut:

$T_d = t_Q - t_P$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Frekuensi pada saat tertentu

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

Simpangan pada saat t_P dan t_Q adalah

$$U_P(t) = Ue^{-\xi\omega_n t_P} \cos(\omega_d t_P - \alpha)$$

$$U_Q(t) = Ue^{-\xi\omega_n t_Q} \cos(\omega_d t_Q - \alpha)$$

karena titik P dan titik Q sepase maka

$$\cos(\omega_d t_P - \alpha) = \cos(\omega_d t_Q - \alpha)$$

Dekremen logaritma dirumuskan dengan

$$\delta = \ln\left(\frac{U_P}{U_Q}\right) = \ln\left(\frac{Ue^{-\xi\omega_n t_P} \cos(\omega_d t_P - \alpha)}{Ue^{-\xi\omega_n t_Q} \cos(\omega_d t_Q - \alpha)}\right)$$

$$= \ln\left(e^{\xi\omega_n (t_Q - t_P)}\right) = \ln\left(e^{\xi\omega_n T_d}\right)$$

$$\delta = \xi\omega_n T_d$$

$$= \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

atau faktor redaman bisa dirumuskan menjadi

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Bila dari persamaan-persamaan di atas dapat diukur simpangan dan waktu pada titik P dan titik

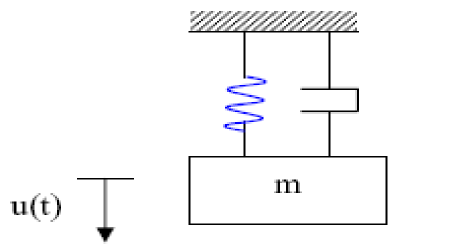
Bila $\xi > 1$, disebut sistem *overdamped* (redaman berat)

$\xi = 1$, disebut sistem redaman kritis

$\xi < 1$, disebut sistem *underdamped* (redaman ringan)

Q, maka dekremen logaritma, faktor redaman, periode getaran teredam, frekuensi getaran teredam dan frekuensi alami sistem bisa dihitung.Dekremen logaritma tidak hanya dapat dihitung berdas arkan perbandingan simpangansaja, melainkan juga berdasarkan perbandingan kecepatan maupun percepatan. Dengan kata lain: dekremen logaritma tetap dapat diukur, baik pada grafik simpangan, kecepatan maupungrafik percepatan.Faktor redaman mempunyai batas harga tertentu, yaitu:

Soal Decrement Logaritma; Diketahui SDOF seperti gambar dibawah dengan massa =2 kg, konstanta pegas =200 N/m. Massa sistem ditarik ke bawah kemudian dilepaskan. Setelah mengalami 4 kali siklus gerakan maka amplitudonya berkurang 80%.



Tentukan faktor redamannya

Berapa redaman kritisnya

Berapa konstanta redaman sistem tersebut

Frekuensi pribadi sistem

Frekuensi sistem saat redaman terpasang

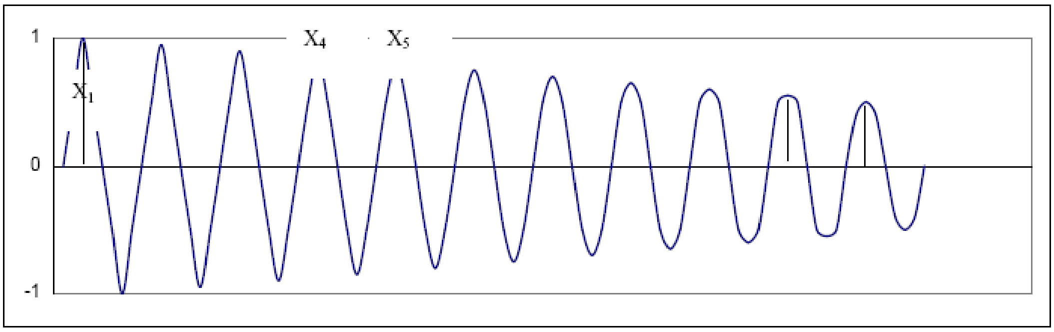
Solusi
Data :

k = 200N/m

m = 2kg

Amplitudo awal = X1 = 100%

Amplitudo setelah siklus 4 kali gerakan = X5 = 20% = 0,2



Sesuai teori logaritma maka

$$\ln\left[\frac{X_1}{X_5}\right] = \ln\left[\frac{X_1}{X_2}\frac{X_2}{X_3}\frac{X_3}{X_4}\frac{X_4}{X_5}\right]$$

Jika

$$\ln\left[\frac{X_1}{X_2}\right] = \ln\left[\frac{X_2}{X_3}\right] = \ln\left[\frac{X_3}{X_4}\right] = \ln\left[\frac{X_4}{X_5}\right] = \delta$$

maka pers di atas dapat ditulis

$$\ln\left[\frac{X_1}{X_5}\right] = \ln\left[\frac{X_1}{X_2}\right] + \ln\left[\frac{X_2}{X_3}\right] + \ln\left[\frac{X_3}{X4_4}\right] + \ln\left[\frac{X_4}{X_5}\right]$$

$$\ln\left[\frac{1}{0{,}2}\right] = \delta + \delta + \delta + \delta$$

$$1{,}609 = 4\delta$$

$$\delta = 0{,}4023$$

a) Faktor redamannya dicari dari $\delta = \dfrac{2.\pi.\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2.\pi)^2 + \delta^2}} = \frac{0{,}4023}{\sqrt{(2.\pi)^2 + 0{,}4023^2}} = 0{,}0639$$

b) Redaman kritis

$$C_c = 2\sqrt{k.m} = 2\sqrt{200x2} = 40 N.s/m$$

c) Konstanta redaman

$$C = 2\zeta\sqrt{k.m} = 2x0{,}0639\sqrt{200x2} = 2{,}556 N.s/m$$

d) Frekuensi pribadi sistem

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 rad/s$$

e) Frekuensi sistem saat redaman terpasang

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 10\sqrt{1-0{,}0639^2} = 9{,}9796 rad/s$$

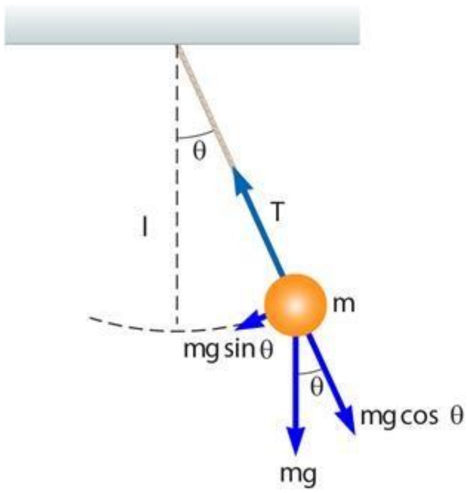
BAB II

GERAK HARMONIK SEDERHANA

Dalam mekanisa dan fisika, gerak harmonik sederhana adalah tipe khusus gerak periodik atau osilasi dimana gaya (F) berbanding lurus dengan perpindahan (x) dandengan arah yang berlawanan dengan perpindahan. Gerakan harmonik sederhana dapat berfungsi sebagai model matematika untuk berbagai gerakan, seperti osilasi pegas. Selain itu, fenomena lain dapat didekati dengan gerakan harmonik sederhana, termasuk gerakan pendulum/bandul dan getaran molekul. Gerakan harmonik sederhana ditandai oleh gerakan massa pada pegas ketika dikenakan gaya pemulihan elastis linier yang diberikan oleh hukum Hooke. Gerakan ini sinusoidal dalam waktu dan menunjukkan frekuensi resonansi tunggal. Agar gerakan harmonik sederhana menjadi model yang akurat untuk pendulum, gaya total pada objek di ujung pendulum harus proporsional dengan perpindahan.

1.2. Gerak Harmonik Sederhana Pada Bandul

Sebuah bandul sederhana terdiri atas sebuah beban bermassa m yang digantung di ujung tali ringan (massanya dapat diabaikan) yang panjangnya l. Jika beban ditarik ke satu sisi dan dilepaskan, maka beban berayun melalui titik keseimbangan menuju ke sisi yang lain. Jika amplitudo ayunan kecil, maka bandul melakukan getaran harmonik. Periode dan frekuensi getaran pada bandul sederhana sama seperti pada pegas. Artinya, periode dan frekuensinya dapat dihitung dengan menyamakan gaya pemulih dan gaya sentripetal.



Gambar 1.1. Gaya pada bandul sederhana

Persamaan gaya pemulih pada bandul sederhana adalah:

$$F = -\mathrm{mg}\sin\theta \tag{1.1}$$

Untuk sudut θ kecil (θ dalam satuan radian), maka sin $\theta = \theta$. Maka persamaannya dapat dituliskan mejadi

$$F = -mg\left(\frac{K}{l}\right) \tag{1.2}$$

Sedangkan gaya sentripetal dari bandul adalah

$$F = -4\pi^2 m f^2 X \tag{1.3}$$

Maka dengan menggabungkan Pers. (1.2) dan Pers. (1.3), maka didapatkan frekwensi (f) dan periode (T) gerakan bandul sebagai berikut

$$-4\pi^2 m f^2 X = -mg\left(\frac{K}{l}\right)$$

$$4\pi^2 f^2 = \left(\frac{g}{l}\right)$$

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{g}{l}\right)$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1.4}$$

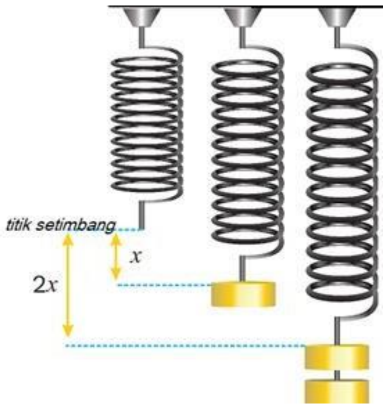
$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1.5}$$

Periode dan frekuensi bandul sederhana tidak bergantung pada massa dan simpangan bandul, tetapi hanya bergantung pada panjang tali dan percepatan gravitasi setempat.

2

Gerak Harmonik pada Pegas

Gerakan simple harmonic oscillato diperlihatkan pada gambar yang terdiri dari bobot/benda yang melekat pada salah satu ujung pegas. Ujung pegasyang terhubung ke dukungan kaku seperti dinding. Jika sistem dibiarkan diam pada posisi setimbang maka tidak ada gaya total yang bekerja pada massa. Namun, jika massa dipindahkan dari posisi kesetimbangan, pegas memberikan gaya elastis yang memulihkan yang sesuai hukum Hooke (hukum elastisitas).



Gambar 1.2. Pegas sederhana

Secara matematis, gaya pemulih F diberikan oleh

$$F_p = -kx \tag{1.6}$$

dimana

F = gaya elastis yang diberikan oleh pegas (N),

k = konstanta pegas (N/m),

x = perpindahan dari posisi kesetimbangan (m). tanda negatif menunjukan arah berlawan dari gaya berat

Osilator Harmonik Mekanis Sederhana

Gerakan harmonik sederhana ditampilkan baik dalam ruang nyata maupun ruang fase. Orbitnya periodik. (Di sini sumbu kecepatan dan posisi telah dibalik dari konvensi standar untuk menyelaraskan kedua diagram). Ketika sistem dipindahkan dari posisi setimbangnya, gaya pemulih yang dipatuhi Hukum Hooke cenderung untuk mengembalikan sistem ke keseimbangan. Setelah massa dipindahkan dari posisi setimbang, ia mengalami gaya pemulih bersih. Akibatnya, ia berakselerasi dan mulai kembali ke posisi setimbang. Ketika massa bergerak lebih dekat ke posisi kesetimbangan, gaya pemulih menurun. Pada posisi setimbang, gaya pemulih menghilang. Namun, pada x = 0, massa memiliki momentum karena percepatan yang diberikan oleh gaya pemulih. Oleh karena itu, massa terus melewati posisi kesetimbangan, menekan pegas. Suatu gaya pemulih jaring kemudian memperlambatnya hingga kecepatannya mencapai nol, dan kemudian dipercepat kembali ke posisi setimbang lagi. Selama sistem tidak kehilangan energi, massa terus berosilasi. Jadi gerak harmonik sederhana adalah jenis gerakan periodik. Perhatikan jika ruang nyata dan diagram ruang fase tidak co-linear, gerakan ruang fase menjadi elips. Area yang tertutup tergantung pada amplitudo dan momentum maksimum.

Dinamika Gerak

Dalam mekanisa Newton, untuk gerak harmonik sederhana satu dimensi, persamaangerak, yang merupakan persamaan diferensial biasa linear orde dua dengan koefisien konstan, dapat diperoleh dengan menggunakan hukum 2 Newton dan hukum Hooke untukmassa pada pegas.

Berat benda dinyatakan dalam gaya berat dengan persamaan Newton sebagai

$$F_g = mg \qquad (1.7)$$

g adalah percepatan gravitasi yang merupakan fungsi perubahan kecepatan (dV) terhadap waktu (dt).

$$g = \frac{dV}{dt} \qquad (1.8)$$

Sedang kecepatan (V) merupakan fungsi perpindahan (dx) terhadap waktu (dt)

$$V = \frac{dx}{dt} \qquad (1.9)$$

Sehingga

$$g = \frac{dV}{dt} = \frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} \rightarrow g = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1.10)$$

Dengan mensubstitusi Pers (1.10) ke Pers. (1.8), maka persamaan gaya pemulih menjadi:

$$F_g = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1.11}$$

dimana

m = massa inersia dari benda berosilasi

x = perpindahannya dari kesetimbangan.

Dengan memperhatikan hukum kesetimbangan dimana Gaya Pegas sama dengan Gaya Berat

$$F_g = F_p \tag{1.12}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{1.13}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{1.14}$$

Secara matematik Pers (1.14) adalah persamaan Diferesial Linier Orde Dua Homogen.

Penyelesaikan Pers (1.14) adalah seperti berikut ini

$$dx/dt = \lambda x \tag{1.15}$$

$$dx/x = \lambda dt \tag{1.16}$$

dengan meintegralkan masing ruas kiri dan kanan diperoleh

$$\ln x = \lambda t \tag{1.17}$$

maka $x = e^{\lambda t}$ diferensial pertama $x(t) \rightarrow dx/dt = \lambda e^{\lambda t}$ diferensial kedua $x^2(t) \rightarrow d^2x/dt^2 = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (1.18)$$

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0 \qquad (1.19)$$

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + k) = 0 \qquad (1.20)$$

Penyelesain dari persamaan tersebut

$$m\lambda^2 + k = 0 \qquad (1.21)$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{-1} \qquad (1.22)$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{i} \qquad (1.23)$$

Dengan memperhatikan persamaan $x(t) = e^{\lambda t}$, maka penyelesaiannya menjadi

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \qquad (2.24)$$

$$x(t) = e^{+\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\mathrm{i}} + e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\mathrm{i}} \qquad (2.25)$$

Jika $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, maka

$$x(t) = e^{+\omega t\mathrm{i}} + e^{-\omega t\mathrm{i}} \qquad (2.26)$$

$$x(t) = \cos\omega t + \sin\omega t \qquad (2.27)$$

Pegas awal memanjang akibat gaya F memiliki simpangan awal A (Amplitudo), saat akan berosilasi dimana t = 0 , persamaan menjadi

$$x(t) = \mathrm{A}\cos\omega t \qquad (2.28)$$

Jika gelombang memiliki kecepata fase awal φ maka persamaan menjadi

$$x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (2.29)$$

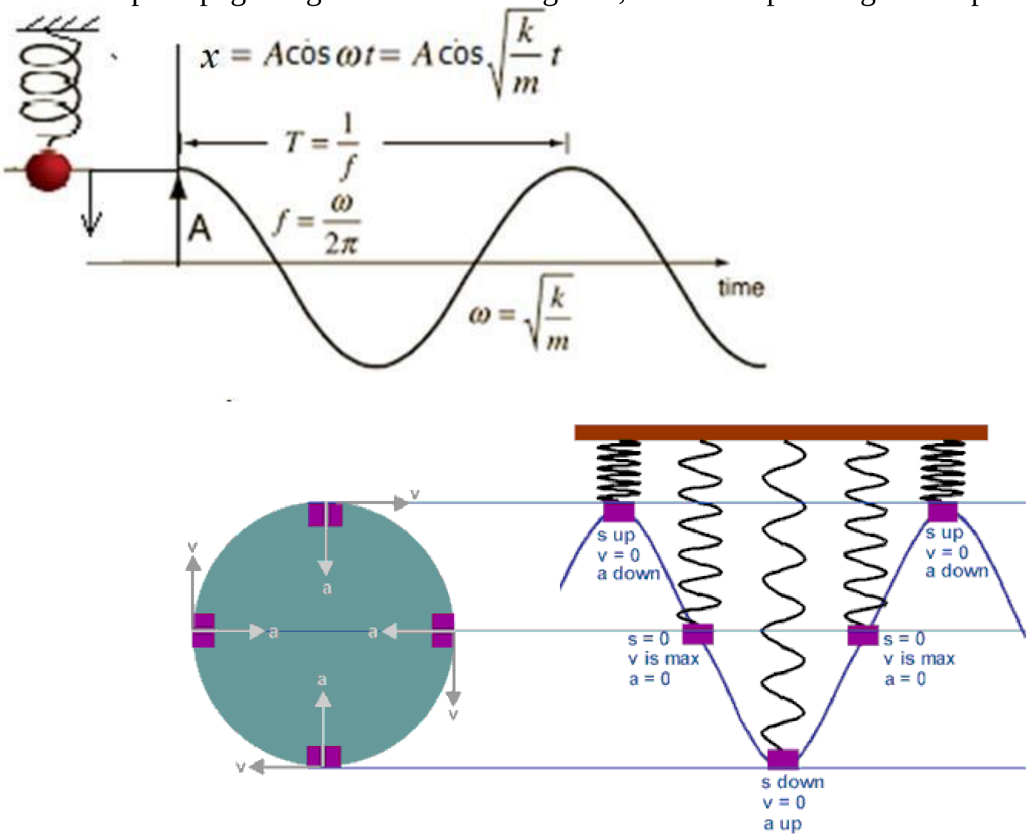
dimana $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ merupakan kecepatan angular/kecepatan sudut, $\omega = 2\pi f$ dan $T = 1/f$

maka periode (T) dalam detik dan frekuensi (f) dalam Herzt menjadi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (1.30)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (1.31)$$

Periode dan frekuensi tidak tergantung pada amplitudo dan fase awal gerak. Jika gerak harmonic sederhana pada pegas digambarkan dalam grafik, maka didapatkan grafik sepertipada Gambar 1.3.



Gambar 1.3. Grafik gerak harmonik sederhana pada pegas

Energi Pegas

Pergantian ω^2 dengan *k/m*, energi kinetik K pada sistem pada t tertentu adalah

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \quad (1.32)$$

Dan energi potensial

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t - \varphi) \quad (1.33)$$

Dengan tidak adanya gesekan dan kehilangan energi lainnya, energi mekanis total memiliki nilai konstan

$$\boldsymbol{E = K + U = \frac{1}{2}kA^2} \quad (1.34)$$

BAB III
HUKUM HOOKE PADA PEGAS

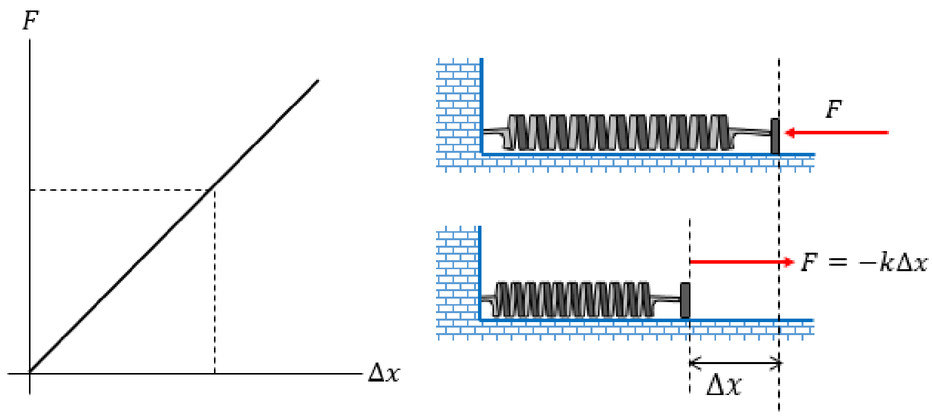
Bahan memiliki sifat elastisitas yang dibatasi oleh nilai Modulus. Hukum Hooke menjelaskan tentang perbandingan gaya yang bekerja pada benda dengan perubahan panjang benda pada daerah elastis.

Hukum Hooke

Hukum Hooke adalah hukum fisika yang menyatakan bahwa gaya (F) yang diperlukan untuk memperpanjang atau mengkompres pegas dengan jarak tertentu (x) skala secara linear sehubungan dengan jarak itu yaitu, $F = -kx$ di mana k adalah karakteristik faktor konstan pegas (yaitu, kekakuannya). Hukum ini dinamai sesuaidengan fisikawan Inggris abad ke-17 Robert Hooke. Dia pertama kali menyatakanhukum pada 1676

“Jika gaya tarik tidak melampaui batas elastis pegas, maka pertambahan panjang pegas berbanding lurus (sebanding) dengan gaya tariknya.”

Menurut Hukum Hooke, pada daerah elastis, yaitu daerah dimana sebuah benda masih dapat kembali ke bentuk semula setelah diberi gaya. Perubahan panjang benda akibat gaya luar sebanding dengan gaya luar yang bekerja. Untuk mempermudah mempelajari teori hukum Hooke pada pegas mari kita tinjau sebuah pegas.



Gambar 2.1. Hukum Hooke pada pegas

Pegas yang diberi gaya luar sebesar F maka, pegas akan memberi gaya yang besarnya sama namun berlawanan arah. Gaya ini disebut dengan gaya pulih. Jika sebuah pegas yang panjangnya dikenai gaya sehingga panjangnya berubah menjadi Δx, maka besar gaya pulih dapat dituliskan sebagai berikut.

$$F = -k\Delta x \tag{2.1}$$

k adalah konstanta pegas yaitu nilai yang menunjukkan gaya yang dibutuhkan untuk mengubah panjang pegas tiap meter. Tanda negatif menunjukkan bahwa arah gaya pulih berlawanan arah dengan vektor perubahan panjang pegas. Jika pegas ditekan ke kanan maka gaya pulih pegas mendorong ke kiri dan sebaliknya.

Besar konstanta pegas adalah nilai yang spesifik untuk setiap bahan. Tentu hal ini berkaitan erat dengan elastisitas bahan dan Modulus Young. Modulus Young dinamai setelah ilmuwan Inggris abad ke-19 Thomas Young; tetapi konsep ini dikembangkan pada 1727 oleh Leonhard Euler, dan eksperimen pertama yang menggunakan konsep modulus Young dalam bentuknya dilakukan oleh ilmuwan Italia Giordano Riccati pada 1782. Modulus Young adalah sifat mekanis yang mengukur kekakuan material padat. Ini mendefinisikan hubungan antara tegangan (gaya per satuan luas) dan regangan(deformasi proporsional) dalam suatu bahan dalam rezim elastisitas linier dari deformasi uniaksial. Jika modulus Young sebuah bahan adalah E dan luas penampangnya adalah A,

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \frac{F}{A} = E\frac{\Delta x}{L_o} \tag{2.2}$$

$$F = AE\frac{\Delta x}{L_o} \tag{2.3}$$

dimana

E = modulus Young

σ = sigma adalah tegangan uniaksial, atau gaya uniaksial per unit permukaan

ε = regangan, (perubahan panjang dibagi dengan panjang awal) tidak berdimensi

Maka konstanta pegas bahan dapat ditentukan dengan persamaan.

$$k = \frac{AE}{L_o} \tag{2.4}$$

Berdasarkan persamaan ini jelas bahwa konstanta pegas dipengaruhi oleh panjang bahan mula-mula, luas penampang dan bahan pegas.

Contoh Soal & Pembahasan

Pegas dengan konstanta sebesar 200 N/m diberi gaya sebesar 50 N. Tentukan pertambahan panjang pegas?

Penyelesaian:

Pertambahan panjang pegas menurut hukum Hooke adalah

$\Delta x = F/k = 50/200 = 0{,}25$ m

Sebuah pegas bertambah panjang 5 cm = 0,05 m saat diberi gaya 100 N. Tentukanbesar konstanta pegas?

Penyelesaian:

Konstanta pegas dapat dihitung dengan rumusan hukum Hooke:

$k = F/\Delta x = 100/0{,}05 = 2.000$ N/m = 2 kN/m

Sebuah batang baja berdiameter 4 mm, jika panjang awal 500 mm dan mengalami beban dengan pertambahan panjang dibatasi sebesar 2 mm, berapa gaya tarik F yang harus diberikan? Baja tersebut memiliki modulus elastisitas = 200 GPa

Penyelesaian:

Konstanta pegas dapat dihitung dengan rumusan

$$k = \frac{AE}{L_o}$$

$$k = \frac{\frac{1}{4}\pi D^2 E}{L_o} = \frac{\frac{1}{4}(3{,}14)(0{,}004)^2(200\ .10^9)}{0{,}5} = 0{,}005\ .10^9 \text{ N/m} = 5 \text{ MN/m}$$

$F = k\Delta x = 5 \times 10^6 \times 0{,}002 = 10.000$ N = 10 kN.

Susunan Pegas

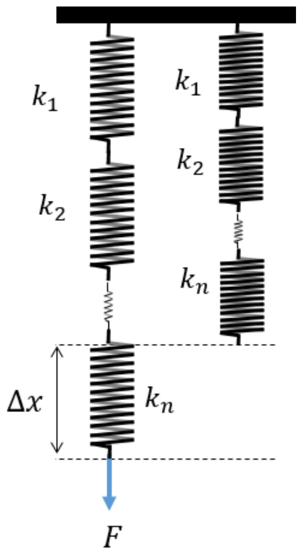
Pada dasarnya rangkaian pegas dapat dirangkai dalam bentuk rangkaian seri dan paralel. Pegas dirangkai dengan tujuan mendapatkan pegas pengganti dengan konstanta sesuai kebutuhan.

Pengertian rangkaian seri dan paralel adalah sebagai berikut;

Rangkian seri berfungsi menghasilkan rangkaian pegas dengan konstanta yanglebih kecil.
Sedangkan pegas yang dirangkai paralel dapat menghasilkan pegas dengankonstanta yang lebih besar.

Rangkaian Pegas Seri

Tinjau sejumlah n pegas ringan dengan konstanta pegas masing-asing k_1, k_2, $k_3 \ldots k_n$ dirangkai secara seri seperti gambar berikut.



Gambar 2.2.n-pegas dengan rangkaian seri

Salah satu ujung rangkaian pegas ditahan kemudian ujung yang lain rangkaian pegas ditarik dengan gaya sebesar F sehingga rangkaian pegas bertambah panjang sebsar Δx. Pada rangkaian seperti ini maka gaya sebesar F bekerja pada masing-masing pegas dan besar Δx merupakan penjumlahan dari pertambahan panjang masing-masing pegas

$\Delta x_{\text{total}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_n$ (2.5)

Menurut hukum Hooke, $\Delta x = F/k$, sehingga persamaan dapat dikembangkan untuk mendapatkan besar kosntanta pegas pengganti rangkaian seri (k_s).

$$\frac{F}{k_s} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3} + \cdots + \frac{F}{k_n}$$

$$\frac{F}{k_s} = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right)$$

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

besar kosntanta pegas pengganti rangkaian Seri

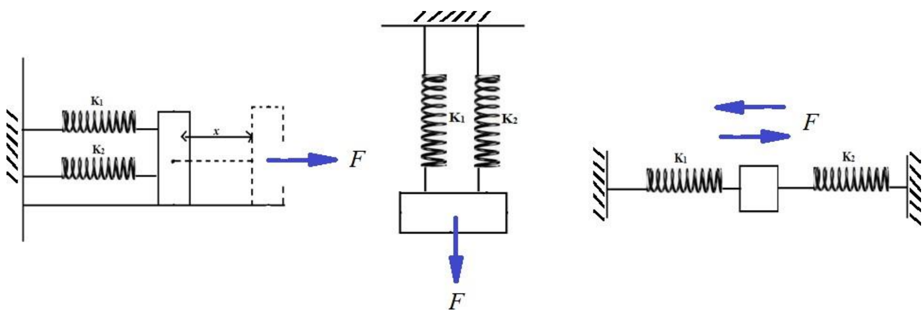
$$k_s = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right)^{-1} \quad (2.6)$$

Pegas Seri jika mengalami osilasi maka frekuensi (*f*) dan periode (T)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_s}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1+k_2)}} \quad (2.7)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_s}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1 k_2}} \quad (2.8)$$

Rangkaian Pegas Paralel



Gambar 2.3.n-pegas dengan rangkaian pararel

Tinjau sejumlah n-pegas ringan dengan konstanta pegas masing-masing konstanta pegas masing-asing k_1, k_2, $k_3 \ldots k_n$ dirangkai secara paralel seperti contoh soal rangkaian paralel pada gambar berikut. Salah satu ujung rangkaian pegas ditahan kemudian ujung yang lain rangkaian pegas ditarik dengan gaya sebesar F sehingga rangkaian pegas bertambah panjang sebesar Δx. Pada contoh soal rangkaian paralel seperti ini maka gaya sebesar F terbagi ke masing-masing pegas dan setiap pegas bertambah panjang dengan besar yang sama.

$\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots.. = \Delta x_n$

$F = F_1 + F_2 + \ldots.. + F_n$

$k_p\ \Delta x = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_{2+\ldots+}\ k_n \Delta x_n k_p\ \Delta x =$

$\Delta x\ (k_1 + k_{2+\ldots+}\ k_n)$

Besar konstanta pegas pengganti rangkaian paralel

$$k_p = k_1 + k_{2+\ldots+}\ k_n \tag{2.9}$$

Pegas pararel jika mengalami osilasi maka frekuensi (f) dan periode (T)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_p}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

(2.10)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}} \tag{2.11}$$

Secara umum perbedaan persamaan pegas pararel dan seri adalah seperti tampak dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Perbedaan pegas seri dan parallel

Quantity	In Parallel	In Series
Equivalent spring constant is that	$k_{eq} = k_1 + k_2$	$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
Equivalent compliance	$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$	$c_{eq} = c_1 + c_2$
Deflection (elongation)	$x_{eq} = x_1 = x_2$	$x_{eq} = x_1 + x_2$
Force	$F_{eq} = F_1 + F_2$	$F_{eq} = F_1 = F_2$
Stored energy	$E_{eq} = E_1 + E_2$	$E_{eq} = E_1 + E_2$

Contoh Soal & Pembahasan

Dua pegas dengan kosntanta masing-masing 18 N/m dan 9 N/m. Hitung konstanta pegas pengganti jika kedua pegas disusun secara:

seri

paralel

Penyelesaian:

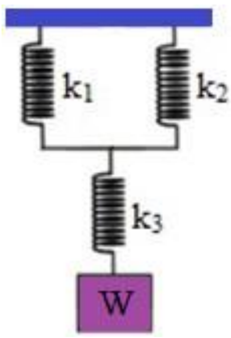
Jika disusun secara seri maka $k_s=(k_1\times k_2)/(k_1+k_2)=(18\times 9)/(18+9)$

$= 162/27 = 6$ N/cm

Jika disusun secara seri maka

$k_p=(k_1+k_2) =18+9 =27$ N/m

Tiga pegas identik, masing-masing mempunyai konstanta elastisitas 200 N/m tersusun seri-paralel seperti pada gambar di bawah. Pada ujung bawah susunan pegasdigantungi beban seberat w sehingga susunan pegas bertambah panjang 1 cm. Berat beban w adalah…



Penyelesaian:

Diketahui :

Konstanta masing-masing pegas ($k_1 = k_2 = k_3$) = 200 N/m
Pertambahan panjang sistem pegas (x) = 1 cm = 0,01 meter

Ditanya : berat beban (w)

Jawab :

Terlebih dahulu hitung **konstanta pegas** gabungan.

Pegas 1 dan pegas 2 tersusun secara paralel. Konstanta pegas penggantinya adalah:

$k_p = k_1 + k_2 = 200 + 200 = 400$ Newton/meter

Pegas pengganti susunan paralel (k_p) dan pegas 3 (k_3) tersusun secara seri.

Konstanta pegas penggantinya adalah:

$1/k = 1/k_p + 1/k_3 = 1/400 + 1/200 = 1/400 + 2/400 = 3/400$

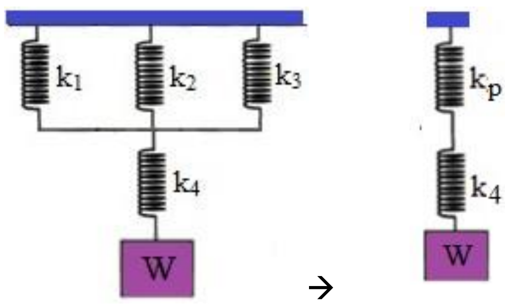
$k = 400/3$ Newton/meter

$F = w = k\,\Delta x$

$w = (400/3)(0{,}01) = 4/3$ Newton Gaya

berat beban adalah 4/3 Newton

Empat pegas identik mempunyai konstanta masing-masing sebesar 500 N/m, tersusun secara seri-paralel. Tentukan pertambahan panjang sistem pegas ketikadiberi beban sebesar 20 Newton.



Penyelesaian:

Diketahui :

Konstanta masing-masing pegas ($k_1 = k_2 = k_3 = k_4$) = 500 N/m

Gaya berat beban (F) = 20 Newton

Ditanya : pertambahan panjang sistem pegas (x)

Jawab:

Terlebih dahulu hitung konstanta pegas gabungan.

Pegas 1, pegas 2 dan pegas 3 tersusun secara paralel. Konstanta pegas penggantinya adalah :

$k_p = k_1 + k_2 + k_3 = 500 + 500 + 500 = 1500$ Newton/meter

Pegas pengganti susunan paralel (k_p) dan pegas 4 (k_4) tersusun secara seri. Konstanta pegas penggantinya adalah :

$1/k = 1/k_p + 1/k_3 = 1/1500 + 1/500 = 1/1500 + 3/1500 = 4/1500k$

$= 1500/4 = 375$ N/m

Pertambahan panjang sistem pegas adalah :

$x = F/k = w / kx$

$= 20 / 375$

$x = 0{,}05$ meterx

$= 5$ cm

Empat pegas identik disusun seri-paralel seperti gambar di bawah. Ketika diberi beban sebesar 20 Newton, sistem pegas bertambah panjang 4 cm. Tentukan (a) konstanta gabungan sistem pegas yang tersusun seri-paralel (b) konstanta masing-masing pegas.

Penyelesaian:

Diketahui :

Gaya berat beban (w) = 20 Newton

Pertambahan panjang sistem pegas (x) = 4 cm = 0,04 meter

Jawab :

konstanta gabungan sistem pegas

$k = F / x = w / x$

$k = 20 / 0{,}04 = 500$ Newton/meter

konstanta masing-masing pegas

Keempat pegas identik sehingga keempat pegas mempunyai konstanta yang sama. Jika pegas 1, pegas 2 dan pegas 3 diganti dengan sebuah pegas maka akan terdapat dua pegas, yakni pegas pengganti paralel (k_p) dan pegas 4 (k_4). Kedua pegas ini tersusun secara seri. Rumus untuk menentukan konstanta susunan seri adalah :

$1/k = 1/k_p + 1/k_4$

$1/500 = 1/k_p + 1/k_4$ —- persamaan 1

k_p adalah konstanta pegas pengganti untuk pegas 1, pegas 2 dan pegas 3 yang tersusun paralel. Karena ketiga pegas identik maka konstanta masing-masing pegas mempunyai besar yang sama dan dapat diwakili oleh huruf k.

$k_p = k_1 + k_2 + k_3 k_p$

$= k + k + k$

$k_p = 3k$ —- persamaan 2

Gantikan k_p pada persamaan 1 dengan k_p pada persamaan 2. Gantikan juga k_4 dengan k

$1/500 = 1/3k + 1/k$

$1/500 = 1/3k + 3/3k$

$1/500 = 4/3k$

$3k = (4)(500)$

$3k = 2000$

$k = 2000 / 3$

$k = 667$ N/m (hasil pembulatan)

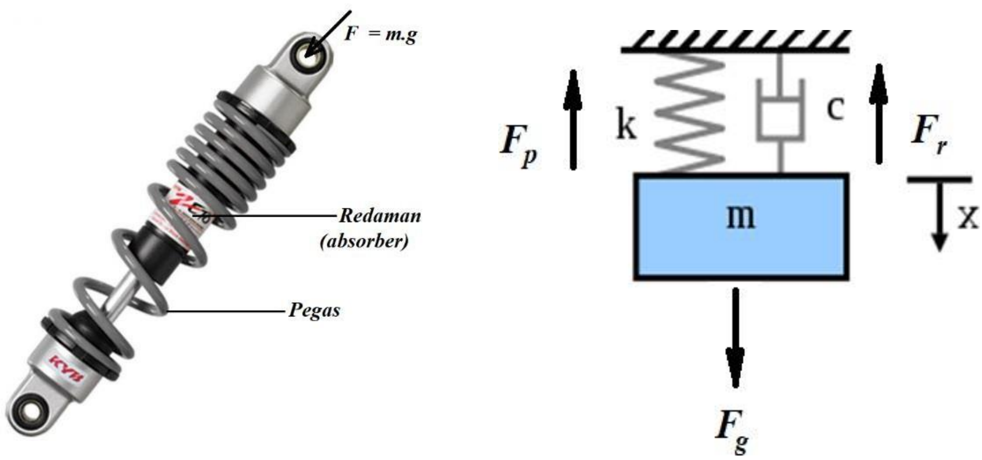
Jadi konstanta masing-masing pegas adalah $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 667$ Newton/meter.

BAB IV GETARAN BEBAS TEREDAM

Komponen Sistem Getaran

Pegas dalam mekanisa adalah sebuah perangkat yang dapat menyerap danmelepaskan energi bersama perubahan dalam bentuknya. Pegas dapat dibuat dalam berbagai jenis dan ukuran dari hampir semua bahan yang memiliki elastisitas (kemampuan untuk mendapatkan kembali bentuk dan ukuran setelah deformasi). Baja dan logam lainnya adalah bahan semi yang paling banyak digunakan sebagai pegas karena sifatelastisnya.

Elemen-elemen dari sistem getaran ditunjukkan sebagaimana Gambar 1. Masing- masing diidealisasikan sebagai massa (m), pegas (k), peredam (c), dan eksitasi (F). Tiga elemen pertama menunjukkan kondisi fisik dari sistem. Keadaan fisik suatu sistem dapat dinyatakan sebagai massa, pegas dan peredam yang tersusun misalnya seperti pada Gambar 1. Massa (m) diasumsikan sebagai body kaku (rigid) yang tidak memiliki elastisitas dan redaman. Sebaliknya pegas juga dianggap hanya memiliki elastisitas (k) saja sehingga massa dan redamannya diabaikan. Demikian halnya peredam juga dianggaphanya memiliki sifat redaman saja. Komponen sock-absorber adalah suatu sistem mekanisme getaran mekanis yang sangat lazim dikenal. Gambar 3.1 adalah gambar shock- absorber serta pemodelam matematika sistem getarannya



Gambar 3.1. Kontruksi shock-absorber dan pemodelam matematikanya

Klasifikasi

Getaran dapat diklasifikasikan menurut ada tidaknya eksitasi yang bekerja secara kontinyu, menurut derajat kebebasannya atau menurut sistem massanya. Menurut klasifikasi yang pertama getaran dibedakan sebagai getaran bebas atau getaran paksa. Disebut sebagai getaran paksa jika pada sistem getaran terdapat gaya eksitasi periodikyang bekerja kuntinyu sebagai fungsi waktu. Pada sistem getaran bebas getaran terjadi karena adanya eksitasi sesaat seperti gaya impulsif atau adanya simpangan awal. Menurut derajat kebebasannya getaran dapat dibedakan sebagai getaran derajat satu, dua, atau n derajat sesuai dengan banyakya koordinat bebas (independence) yang diperlukan untuk mendefinisikan persamaan gerak sistem tersebut. Pada sistem getaran massa diskret setiap massa dianggap sebagai bodi kaku dan tidak mempunyai elastisitas. Sebaliknya padasistem massa kontinu, massa yang bergetar tidak dianggap sebagai bodi kaku tetapi mempunyai elastisitas sehingga dimungkinkan adanya gerak relatif di antara titik-titikpada massa tersebut. Sistem massa kontinyu memiliki n derajat kebebasan yang tak berhingga. Ketiga model klasifikasi getaran tersebut adalah:

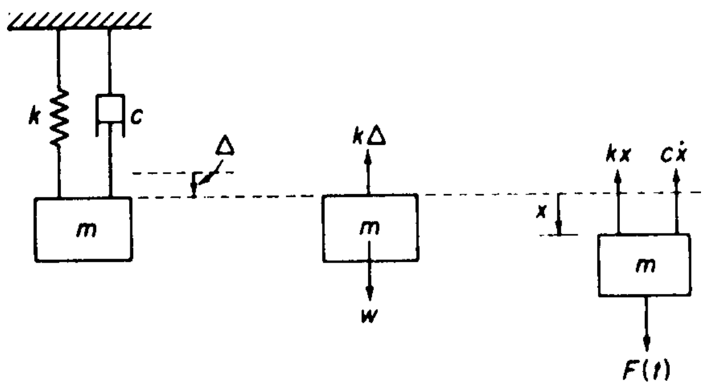
Sistem getaran bebas massa diskret dua derajat kebebasan

Sitem getaran paksa massa diskret satu derajat kebebasan

Sistem getaran paksa massa kontinyu

Analisa Getaran Bebas Teredam

Gambar 3.2 adalah model matematika sistem getaran yang tediri dari massa (m), pegas dengan konstanta pegas k, serta damper dengan konstanta redaman c. Sedangkan Fgadalah gaya gravitasi. Fp adalah gaya pegas, dan Fr adalah gaya redaman



Gambar 3.2. Getaran Bebas dengan Peredam

Berdasarkan hukum kesetimbangan, jumlah gaya-gaya vertikal selalu dalam keadaan setimbang, maka

$$Fg\,(t) + Fr\,(t) + Fp\,(t) = F\,(t) \qquad (3.1)$$

Jika F (t) = 0, persamaan diferensial homogen yang solusinya sesuai secara fisik dengan getaran bebas teredam dimana pengaruh gaya luar F(t)=0. Dengan F (t) = 0, diperoleh solusi khusus yang disebabkan oleh eksitasi homogen yang memberi pemahaman tentang peran redaman, dengan persamaan menjadi

$$Fg\,(t) + Fr\,(t) + Fp\,(t) = 0 \qquad (3.2)$$

Fg (t) adalah gaya grafitasi sebagai fungsi waktu, maka

$$Fg = m.g \to g = \frac{d^2x}{dt^2} \to Fg = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (3.3)$$

Fr (t) adalah gaya redaman sebagai fungsi waktu, maka

$$Fr = CV \to V = \frac{dx}{dt} \to Fr = C\frac{dx}{dt} \qquad (3.4)$$

Fp (t) adalah gaya pegas sebagai fungsi waktu

$$Fp = k.x \qquad (3.5)$$

Jika sistem mendapat pengaruh gaya luar F (t), maka persamaan umumnya menjadi

Fg + Fr + Fp = F(t)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \qquad (3.6)$$

Secara umum kontrusi pegas dengan redaman dengan massa tertentu tanpa ada pengaruh gaya luar dirumuskan sebagai persamaan Diferensial Linier Orde 2 Homogen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + k\,x = 0 \qquad (3.7)$$

Penyelesaian Pers. (3.7) diatas adalah seperti berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \omega x \qquad (3.8)$$

$$\frac{dx}{x} = \omega dt \qquad (3.9)$$

Integralkan kedua ruas Pers. (3.9)

$$\ln x = \omega t \tag{3.10}$$

Sehinga x mejadi

$$x = e^{\omega t} \tag{3.11}$$

Dengan mensubstitusi Pers (3.11) ke Pers. (3.8), maka

$$\frac{dx}{dt} = \omega e^{\omega t} \tag{3.12}$$

Serta diferensial dari Pers (3.12) adalah

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 e^{\omega t} \tag{3.13}$$

Dengan mesnbstitusi Pers (3.12) dan Pers. (3,13) ke Pers. (3.7), maka persamaan getaran bebas teredam menjado

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + k\,x = 0$$

$$m\,\omega^2 e^{\omega t} + c\,\omega e^{\omega t} + k e^{\omega t} = 0$$

$$e^{\omega t}(m\,\omega^2 + c\,\omega + k) = 0 \tag{3.14}$$

Penyelesaian dari Pers. (3.14) tersebut hanya tergantung dari dari persamaan kuadrat berikut:

$$m\,\omega^2 + c\,\omega + k = 0 \tag{3.15}$$

Dimana penyelesaian persamaan kuadrat tersebut adalah sebagai berikut

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4\,m\,k} \tag{3.16}$$

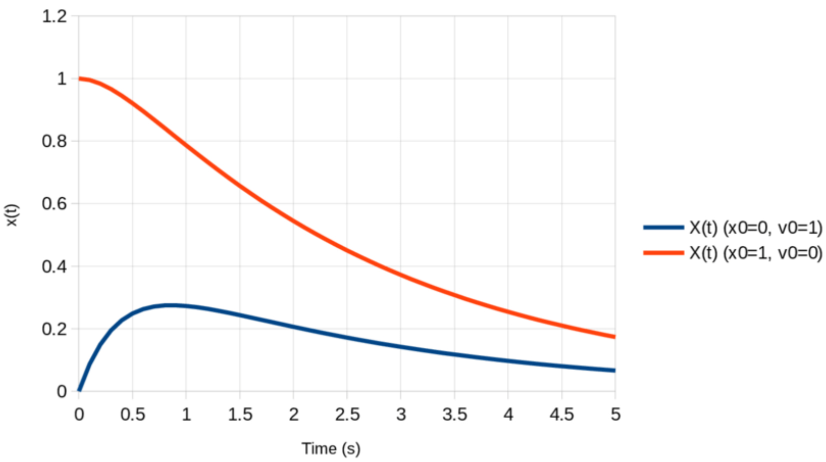
Solusi persamaan kuadrat tergantung dari $\sqrt{c^2 - 4\,m\,k}$

Jika $c^2 - 4\,m\,k > 0$ → $c^2 > 4\,m\,k$ → maka persamaan kuadrat tersebut memiliki dua penyelesaian bilangan real m_1 dan m_2 dimana m_1 G m_2

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4\,m\,k}$$

$$x(t) = A_1 e^{\omega 1 t} + A_2\, e^{\omega 2 t} \qquad (3.17)$$

Bentuk solusi persamaan disebut ***Over-Damped***



Gambar 3.3. Getaran bebas *Over-Damped*

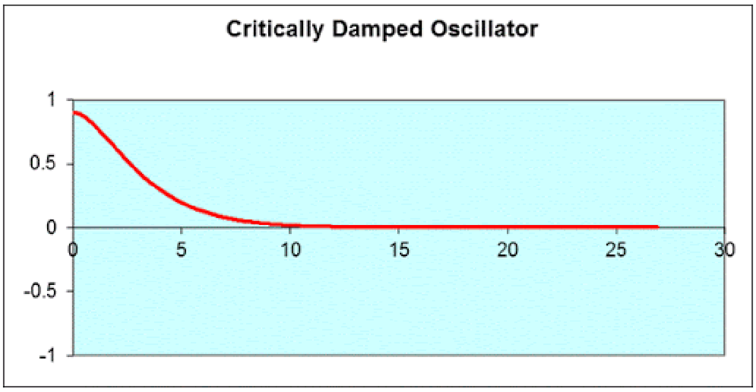
Jika $c^2 - 4\,m\,k = o \rightarrow c^2 = 4\,m\,k$ maka persamaan kuadrat tersebut memiliki satu penyelesaian bilangan real atau $m_1 = m_2$

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4\,m\,k}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm 0$$

$$x(t) = (A_1 + A_2\, t)e^{\omega t} \qquad (3.18)$$

Bentuk solusi persamaan disebut ***Critical-Damped***



Gambar 3.4. Getaran bebas *Critical Damped*

Jika $c^2 - 4\,m\,k < 0 \rightarrow c^2 < 4\,m\,k$, maka persamaan kuadrat tersebut memilikidua penyelesaian bilangan kompleks. Hasilnya ω_1 dan ω_2 bilangan komplek (bilangan nyata dan bilangan imajiner).

Hasil bilangan nyata: $-\frac{c}{2m}$

Hasil bilangan imajiner: $\sqrt{(c^2 - 4\,m\,k)} = \sqrt{-1}\sqrt{-(c^2 + 4mk)}$

$$= \frac{\sqrt{(-c^2 + 4mk)}}{2m}\,(i)\,, \qquad z = \frac{\sqrt{(-c^2 + 4mk)}}{2m}$$

$$\omega_1 , \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm zi$$

$$x(t) = e^{(-\frac{c}{2m} \pm zi)t}$$

$$x(t) = e^{(-\frac{c}{2m} + zi)t} + e^{(-\frac{c}{2m} - zi)t}$$

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} . (e^{(+zi)t} + e^{(-zi)t})$$

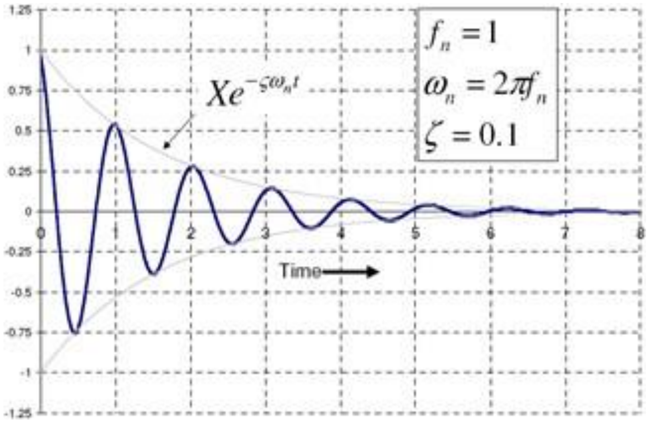
$$e^{\pm zi} = (\cos \omega t + \sin \omega t)$$

$$x\,(t) = e^{-\frac{c}{2m}}\,(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) \tag{3.19}$$

Atau

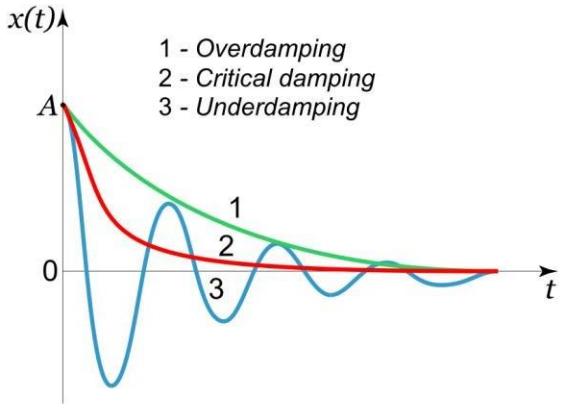
$$x\,(t) = A\,e^{-\frac{c}{2\,m}}\,(\cos\omega t + \theta) \qquad (3.20)$$

Bentuk solusi persamaan disebut ***Under-Damped***



Gambar 3.5. Getaran bebas *Under-Damped*

Perbedaan masing-masing sistem sangat tergantung dari kontanta pegas (k) dan kontanta redaman (c). Pengaruh tersebut memberikan getaran dengan fungsi amplitudo (x) sebagai fungsi waktu (t) yang berbeda, perbedaan tersebut dapat dilihat pada gambar di bawah ini



Gambar 3.6. Getaran *over*, *critical*, dan *under damping*

Solusi persamaan ini tergantung pada besarnya redaman. Bila redaman cukup kecil, sistem masih akan bergetar, namun pada akhirnya akan berhenti. Keadaan ini disebut kurang redam, dan merupakan kasus yang paling mendapatkan perhatian dalam analisis vibrasi. Bila peredaman diperbesar sehingga mencapai titik saat sistem tidak lagi berosilasi, kita mencapai titik redaman kritis. Bila peredaman ditambahkan melewati titik kritis ini sistem disebut dalam keadaan lewat redam. Nilai koefisien redaman yang diperlukan untuk mencapai titik **redaman kritis** pada model massa-pegas-peredam adalah:

$$\sqrt{(c_c^2 - 4\,m\,k)} = 0$$
$$(c_c^2 - 4\,m\,k) = 0$$
$$c_c^2 = 4\,m\,k$$
$$c_c = \sqrt{4mk}$$
$$c_c = 2\sqrt{mk} \tag{3.21}$$

Untuk mengkarakterisasi jumlah peredaman dalam sistem digunakan nisbah yang dinamakan nisbah redaman. Nisbah ini adalah perbandingan antara peredaman sebenarnya terhadap jumlah peredaman yang diperlukan untuk mencapai titik redaman kritis. Rumus untuk nisbah redaman (Ç) (zeta) adalah :

$$Ç = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \tag{3.22}$$

Sebagai contoh struktur logam akan memiliki nisbah redaman lebih kecil dari 0,05 sedangkan suspensi otomotif akan berada pada selang ζ= 0,2 - 0,3. Solusi sistem kurang redam pada model massa-pegas-peredam adalah:

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi), \quad \omega_n = 2\pi f_n \tag{3.23}$$

Nilai X, amplitudo awal dan ingsutan fase, ditentukan oleh panjang reganganpegas. Dari solusi tersebut perlu diperhatikan dua hal: faktor eksponensial dan fungsi cosinus.
Faktor eksponensial menentukan seberapa cepat sistem teredam: semakin besar nisbah redaman, semakin cepat sistem teredam ke titik nol.

Fungsi kosinus melambangkan osilasi sistem, namun frekuensi osilasi berbedadaripada kasus tidak teredam.

Frekuensi dalam hal ini disebut "frekuensi alamiah teredam", fd, dan terhubung dengan frekuensi alamiah tak-teredam dengan persamaan berikut.

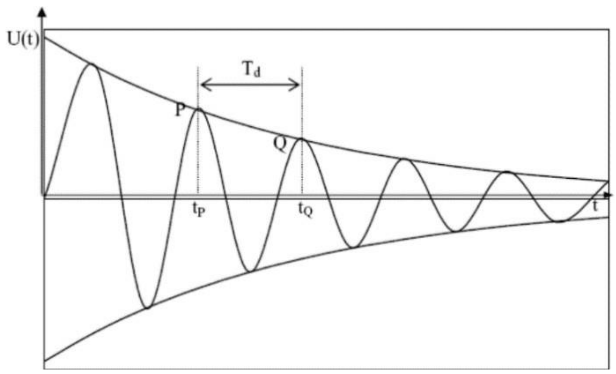
$$f_d = \sqrt{1-\zeta^2} f_n \qquad (3.34)$$

Frekuensi alamiah teredam lebih kecil daripada frekuensi alamiah tak-terredam, namun untuk banyak kasus praktis nisbah redaman relatif kecil, dan karenanya perbedaan tersebut dapat diabaikan. Karena itu deskripsi teredam dan takredam kerap kali tidak disebutkan ketika menyatakan frekuensi alamiah.

Pengurangan Logaritmik

Secara mudah untuk menentukan jumlah yang ada dalam sistem adalah dengan mengukur laju peluruhan osilasi bebas. Makin besar redamannya, makin besar pula laju peluruhannya.

Gambar 3.7. Grafik pengurangan logaritmik



Pengurangan logaritmik didefinisikan sebagai logaritma natural dari rasio dua amplitudo berurutan. Jadi rumusan pengurangan logaritmik adalah

$$\delta = ln \frac{x1}{x_2}$$

$$x = xe^{(-\pounds\omega_n \pm i\sqrt{1-\pounds^2}\omega_n)t}$$

$$x = Ae^{(-\pounds\omega_n + i\sqrt{1-\pounds^2}\omega_n)t} + Be^{(-\pounds\omega_n - i\sqrt{1-\pounds^2}\omega_n)t}$$

$$x = xe^{-\pounds\omega_n t} \sin(\sqrt{1-Ç^2}\omega_n t + \theta)$$

$$\delta = ln \frac{x1}{x_2}$$

$$\delta = ln \frac{xe^{-\pounds\omega_n t_1} \sin(\sqrt{1-\pounds^2}\omega_n t_1 + \theta)}{xe^{-\pounds\omega_n(t_1+t_d)} \sin(\sqrt{1-\pounds^2}\omega_n(t_1+t_d)+\theta)}$$

$$\delta = ln \frac{e^{-£\omega_n t1}}{e^{-£\omega_n(t1+t_d)}}$$

$$\delta = \ln \ e^{£\omega_n t_d}$$

$$\delta = Ç\omega_n t_d$$

$$\delta \cong 2\pi Ç$$

Contoh soal

Konstruksi pegas dan redaman dibebani benda berat 10 kg. factor kontanta pegas = 90 N/m dan factor konstanta redaman = 100 Ndt/m. Jika diberi simpangan awal (dengan Tarik) = 15 cm = 0,15 m dan kecepatan balik v= 10 m/dt, tentukan persamaannya

Penyelesaian:

m = 10 kg k = 90

N/m

c = 100 Ndt/m

$m\omega^2 + c\omega + k = 0 \ 10\omega^2 +$

$100 \ \omega + 90 = 0$

$$\omega_1 \ dan \ \omega_2 = -\frac{100}{2(10)} \pm \frac{1}{2(10)} \sqrt{100^2 - 4(10)(90)}$$

$$\omega_1 \ dan \ \omega_2 = -5 \pm \frac{1}{20} \sqrt{10.000 - 3.600}$$

$$= -5 \pm \frac{1}{20} \sqrt{10.000 - 3.6000}$$

$$= -5 \pm \frac{1}{20} \sqrt{6400} \qquad = -5 \pm \frac{80}{20}$$

$$= -5 \pm 4$$

$\omega_1 = -5 + 4 = -1, \qquad \omega_1 = -1$

$\omega_2 = -5 - 4 = -9, \quad \omega_2 = -9$

$x(t) = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_2 t}$

Hasil penyelesaian persamaan umum tersebut:

$x(t) = A_1e^{-1t} + A_2e^{-9t}$

Syarat batas untuk menentukan persamaan khususnya

A_1= simpangan awal, menunjukan amplitudo *x=15cm* pada t = 0

$x = 15\ cm$

$x = 0{,}15\ m$

$0{,}15 = A_1e^{-1(0)} + A_2e^{-9(0)}$

$0{,}15 = A_1(1) + A_2(1)$

$A_1 + A_2 = 0{,}15$

Syarat batas kedua kecepatan awal v =10 m/dt, fungsi kecetapan merupakan $v = \frac{dx}{dt}$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A_1e^{-1t} + A_2e^{-9t})}{dt} = -A_1e^{-1t} - 9A_2e^{-9t}$$

$-A_1e^{-1t} - 9A_2e^{-9t} = 10$

Kecepatan awal v = 10 m/dt, beban dilepas menunjukan limit t mendekati nol → t ≅ 0

$-A_1e^{-1(0)} - 9A_2e^{-9(0)}) = 10$

$-A_1(1) - 9A_2(1) = 10$

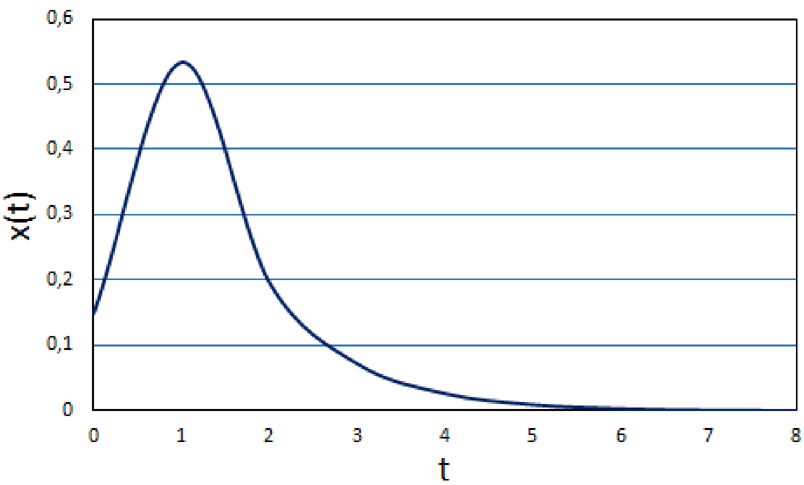
$-A_1 - 9A_2 = 10$ persamaan lain di atas $A_1 + A_2 = 0{,}15$

$A_1 + A_2 = 0{,}15 \rightarrow A_1 = 0{,}15 - A_2$

$-(0{,}15 - A_2) - 9A_2 = 10 \rightarrow -0{,}15 - 8A_2 = 10 \rightarrow A_2 = -1{,}3\ m$

$A_1 + (-1{,}3) = 0{,}15 \rightarrow A_1 = 1{,}45\ m$

Penyelesaian akhir adalah: $x(t) = 1{,}45\ e^{-1t} - 1{,}3\ e^{-9t}$



Dengan konstruksi yang sama dengan Soal 1, dengan nilai konstruksi redaman di gantic = 8 N dt/m, k = 90 N/m

Penyelesaian:

$m\,\omega^2 + c\,\omega + k = 0 \quad 10\,\omega^2 + 8\,\omega + 90 = 0$

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4\,mk}$$

$$\omega_1, \omega_2 = -\frac{8}{2(10)} \pm \frac{1}{2(10)}\sqrt{64 - 3.600}$$

$$\omega_1, n\,\omega_2 = -\frac{8}{2(10)} \pm \frac{1}{2(10)}\sqrt{-3536}$$

$$\omega_1, \omega_2 = -0{,}4 \pm \frac{59{,}46}{20}\sqrt{-1}$$

$\omega_1, \omega_2 = -0{,}4 \pm 2{,}973\,\sqrt{-1}$

Pembulatan desimal → $\omega_1, \omega_2 = -0{,}4 \pm 3\,\sqrt{-1}$

$\omega_1, \omega_2 = -0{,}4 \pm 3i$

Penyelesaian untuk hasil akar-akar bilangan komplek.

$$x(t) = A e^{-\frac{c}{2m}t}\left(\cos\left(\frac{1}{2m}\sqrt{-(c^2 + 4mk)}\right) t\right)$$

$x(t) = A\,e^{-0{,}4t}\,(\cos 3\,t)$

Simpangan x = 0,15 m pada saat →t = 0

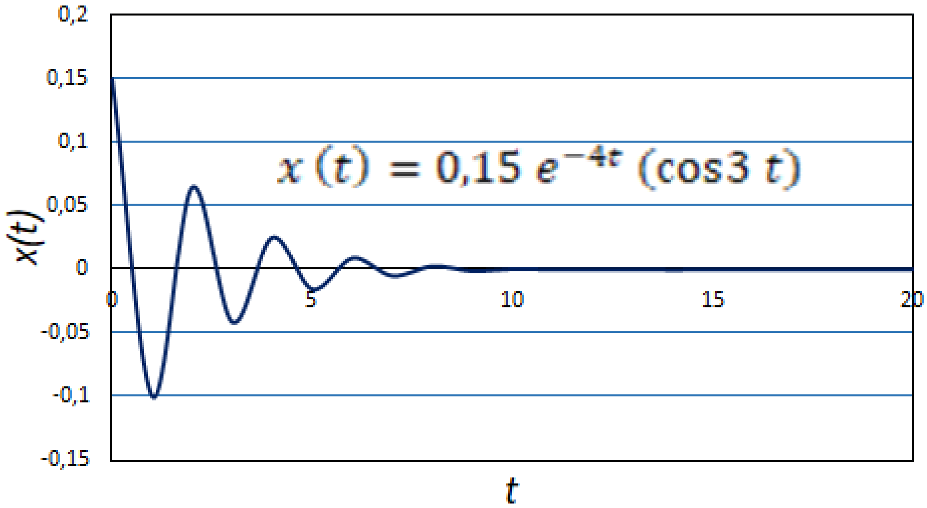
$x\ (0)\ =\ A\ e^{-0,4(0)}\ (\cos 3\ (0))$

0,15 = A (1) → A = 0,15 m

Penyelesaian akhir berupa Persamaan tersebut adalah:

$x\ (t)\ =\ 0{,}15\ e^{-0,4t}\ (\cos 3\ t)$

Dengan bentuk persamaan grafik merupakan getaran teredam **(*Under-Damped*)**

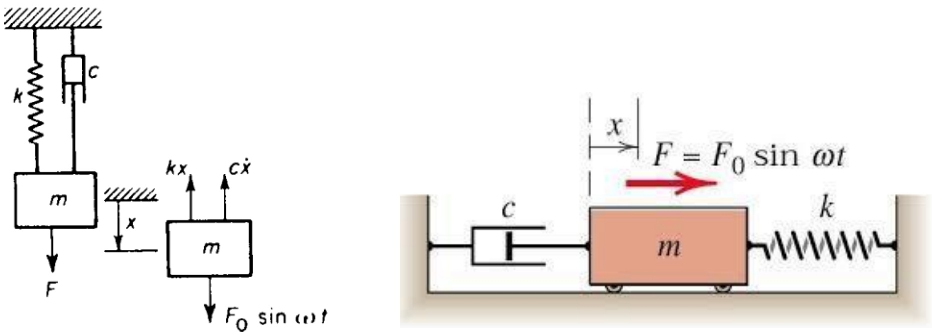


BAB V GETARAN PAKSA

Getaran Paksa Harmonik

Eksitasi harmonik sering dijumpai dalam sistem teknik. Eksitasi harmonik umumnya diproduksi oleh ketidakseimbangan dalam mesin berputar. Meskipun eksitasi harmonik murni lebih kecil kemungkinannya terjadi daripada eksitasi periodik atau jenis eksitasi lainnya, memahami perilaku suatu sistem yang mengalami eksitasi harmonik sangat penting untuk memahami bagaimana sistem merespons eksitasi yang lebih umum. Eksitasi harmonik mungkin dalam bentuk gaya atau perpindahan beberapa titik dalam sistem.

Pertama-tama kita akan mempertimbangkan sistem derajat kebebasan (*degree of freedoom/DOF*) tunggal dengan redaman *viscous*, tereksitasi oleh gaya harmonic *Fo Sin ωt*, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Sistem yang diredam secara paksa dengan eksitasi harmonik

Persamaan diferensial geraknya ditemukan dari diagram benda bebas, dalam bentuk

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_o \sin \omega t \qquad (4.1)$$

atau

Fg (t) + Fr (t) + Fp (t) = F (t)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t \qquad (4,2)$$

Getaran paksa adalah getaran yang terjadi karena adanya gaya luar yang bekerja pada suatu sistem sehingga sistem tersebut bergetar. Bila gaya luar, biasanya *f(t) = fc sin* $\omega_n t$

atau *f(t)* = fc cos ω_nt bekerja pada sistem getaran paksa. Sistem cenderung bergetar pada frekuensi sendiri di samping mengikuti gaya eksitasi. Dengan adanya gesekan bagian gerakan yang ditahan oleh gaya sinusoidal secara perlahan hilang. Dengan demikian, sistem akan bergetar pada frekuensi pribadi sistem. Bagian getaran yang berlanjut terus disebut getaran keadaan steady atau respon sistem keadaan steady dibutuhkan dalamanalisa getaran karena efek sinambungnya.

$$Xp = \frac{Fc \sin(\omega_n t - \theta)}{((k - m\omega^2)^2 + (\omega^2)^{1/2}} \quad (4.3)$$

Sedang sudut fasanya adalah:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{c\omega}{km\omega^2} \quad (4.4)$$

Dimana:

Xp = Amplitudo getaran Fc = Besar gaya eksitasi m = Massa sistem

c = Koefisien peredam

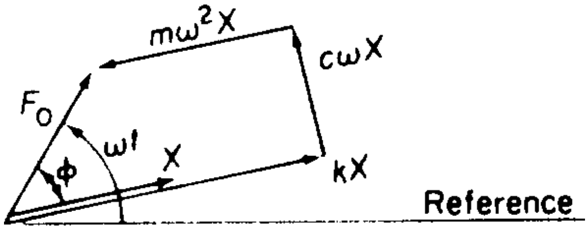
ω = Frekuensi gaya eksitas

Solusi untuk persamaan ini terdiri dari dua bagian, fungsi pelengkap, yang merupakan solusi dari persamaan homogen, dan integral tertentu. Fungsi pelengkap. dalam hal ini, adalah getaran bebas teredam.

Solusi khusus untuk persamaan sebelumnya adalah osilasi kondisi-mapan dari frekuensi yang sama dengan eksitasi. Kita dapat menganggap solusi tertentu berbentuk:

$$x = X\sin(\omega t - \phi) \quad (4.5)$$

dimana X adalah amplitudo osilasi dan f adalah fase perpindahan sehubungan dengan gaya. Amplitudo dan fase dalam persamaan sebelumnya ditemukan dengan mengganti persamaan (4.3) ke dalam persamaan diferensial (4.2). Mengingat bahwa dalam gerak harmonik, fase kecepatan dan akselerasi berada di depan perpindahan masing-masing sebesar 90° dan 180°, syarat-syarat persamaan diferensial juga dapat ditampilkan secara grafis seperti pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2. Hubungan vektor untuk getaran paksa teredamSangat mudah

dilihat dari diagram pada Gambar 4.2,

$$X = \frac{F_o}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \qquad (4.5)$$

dan

$$\phi = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \qquad (4,6)$$

Kami sekarang menyatakan Persamaan (4.5) dan (4,6) dalam istilah non-dimensi yang memungkinkan presentasi grafis singkat dari hasil ini. Membagi pembilang dan penyebut Persamaan. (4.5) dan (4,6), maka diperoleh:

$$X = \frac{\frac{F_o}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} \qquad (4.7)$$

dan

$$\tan \phi = \frac{\frac{c\omega}{k}}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} \qquad (4.8)$$

Persamaan ini dapat diekspresikan lebih lanjut sebagai berikut:

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ frekuensi naturan/alami gerak osilasi tanpa redaman

$$c_c = 2m\,\omega_n = \text{critical damping}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \text{damping factor}$$

$$\frac{c\,\omega}{k} = \frac{c}{c_c}\,\frac{c_c\,\omega}{k} = 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}$$

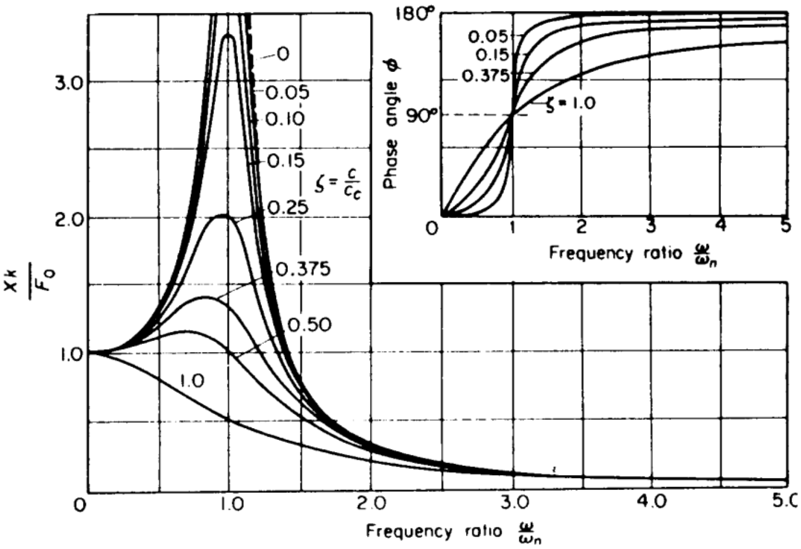
Ekspresi non-dimensi untuk amplitudo dan fase kemudian menjadi

$$\frac{Xk}{F_o} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \tag{4.9}$$

dan

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{4.10}$$

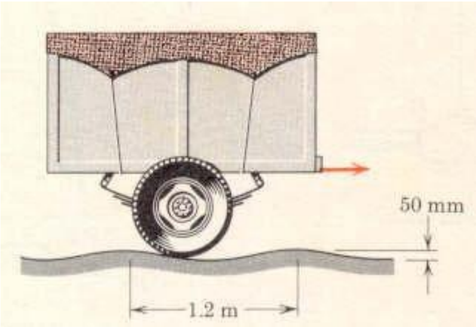
Persamaan ini menunjukkan bahwa amplitudo non dimensi, Xk/F_o dan fase f hanya sebagai fungsi dari rasio frekuensi ω/ω_n dan faktor redaman z, serta dapat diplot seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4,3.

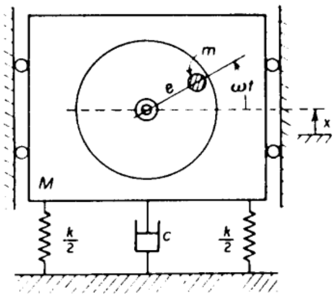


Gambar 4.3 bentuk ekpresi dari Pers. (4.9) dan Pers. (4.10)

Putaran Ketidakseimbangan

Ketidakseimbangan dalam mesin berputar adalah sumber umum dari eksitasi getaran.Sistem massa pegas dibatasi untuk bergerak ke arah vertikal pada mesin berputar yang tidak seimbang, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.4.





Gambar 4.4. Kekuatan eksitasi harmonik akibat berputar ketidakseimbangan

Ketidakseimbangan diwakili oleh massa eksentrik dengan eksentrisitas e yang berputar dengan kecepatan sudut ω. Dengan membiarkan x menjadi perpindahan massa yang tidak berputar (M - m) dari posisi kesetimbangan statis, perpindahan m adalah:

(4.11) $x + e\sin\omega t$

Persamaan gerak akibat kekuatan gangguan harmonik karena mesin berputar ketidakseimbangan adalah:

$$(M-m)\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2(x+e\sin\omega t)}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} \qquad (4.12)$$

dan dapat dituliskan ulang menjadi:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = me\,\omega^2\sin\omega t \qquad (4.13)$$

Dimana Fo digantikan oleh $me\omega^2$, dan karenanya solusi kondisi-mapan dari bagian sebelumnya dapat digantikan oleh:

$$X=\frac{me\,\omega^2}{\sqrt{(k-m\,\omega^2)^2+(c\,\omega)^2}} \qquad (4.14)$$

Dan

$$\tan\phi=\frac{c\,\omega}{k-M\,\omega^2} \qquad (4.15)$$

Jika direduksi lebih lanjut menjadi bentuk non dimensional:

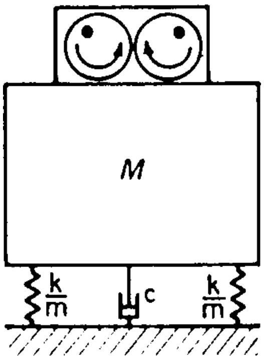
$$\frac{M}{m}\frac{X}{e}=\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \qquad (4.16)$$

dan

$$\tan\phi=\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad (4.17)$$

Contoh soal:

1. Sebuah exciter berat eksentrik berputar digunakan untuk menghasilkan osilasi paksa dari massa yang didukung pegas seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5. Dengan memvariasikan kecepatan rotasi, amplitudo resonansi 0,60 cm. Ketika kecepatan rotasimeningkat jauh di luar frekuensi resonansi, amplitudo tampak mendekati nilai tetap 0,08 cm. Tentukan faktor redaman sistem.



Penyelesaian:

Amplitudo resonan adalah:

$$X=\frac{\frac{me}{M}}{2\zeta}=0.60\,cm$$

Ketika ω jauh lebih besar daripada, ω_n persamaan yang sama menjadi

$$X = \frac{me}{M} = 0.08\,cm$$

Dengan menyelesaikan dua persamaan secara bersamaan, faktor redaman sistem adalah

$$\zeta = \frac{0.08}{2 \times 0.60} = \underline{\underline{0.0666}}$$

Sebuah sistem bergetar terdiri dari berat W = 44.5 N dan pegas kekakuan k = 3504 N/m, dipengaruhi redaman liat (viscous damped) sehingga dua amplitudo puncaksecara berurutan adalah 1.00 sampai 0.85. Hitunglah:

Frekuensi natural dari sistem tak teredam

Pengurangan logaritmis (logarithmic decrement) (c). rasio redaman (dampingratio)

koefisien redaman

frekuensi natural teredam

Penyelesaian:

(a). Frekuensi natural dari sistem tak teredam dalam radian per detik adalah :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{W/g}} = \sqrt{\frac{3504}{(44.5/9.81)}} = 27.79\,\mathbf{rad/s}$$

Atau dalam putaran per detik

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{27.79}{2\pi} = 4.42\,\mathbf{sps}$$

(b). Pengurangan logaritmis (logarithmic decrement)

$$\delta = \ln\frac{y_1}{y_2} = \ln\frac{1.00}{0.85} = 0.163$$

(c). rasio redaman (damping ratio)

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.163}{2\pi} = 0.026$$

(d). koefisien redaman

$$c = \xi\, c_{cr} = 0.026\left(2\ x\sqrt{3504\,x(44.5/9.81)}\right) = 6.55\ \text{N s/m}$$

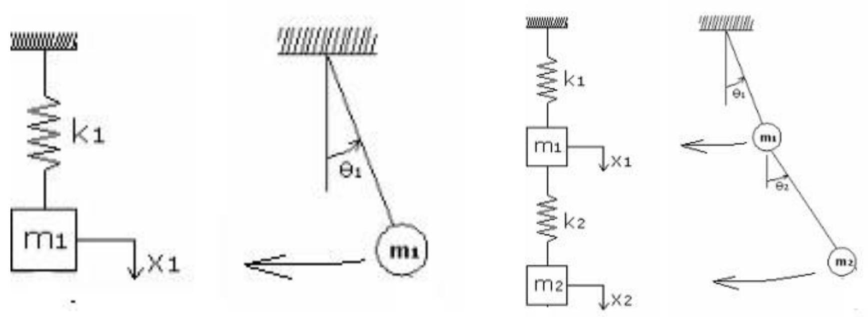
(e). frekuensi natural teredam

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 27.79\sqrt{1-(0.026)^2} = 27.78\ rad/s$$

BAB VI.
GETARAN MEKANIS DUA DERAJAT KEBEBASAN

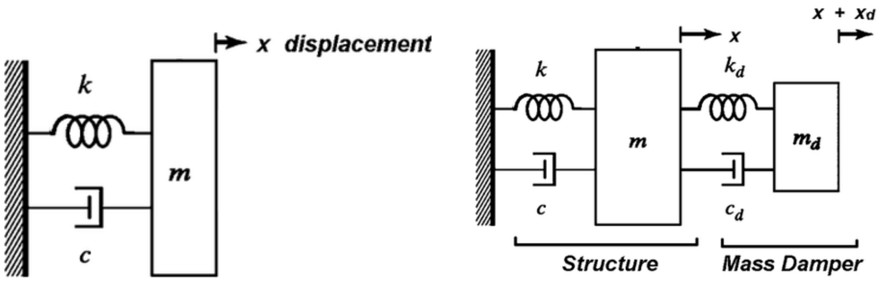
Sejauh ini, teori getaran sistem derajat kebebasan tunggal (*single degree of freedom/SDOF*) yang teredam dan tidak teredam telah dijelaskan secara detail pada Bab sebelumnya. Baik gerak bebas dan gerak paksa dari sistem tersebut telah dibahas dan diperoleh persamaan diferensial yang mengatur dan memberikan solusinya. Konsep dan definisi yang mendasar dalam memahami getaran sistem kebebasan tunggal telah diperkenalkan. Bab ini bertujuan untuk mengeneralisasi perkembangan analitis yang disajikan dalam bab-bab sebelumnya pada kasus di mana sistem memiliki lebih dari satu derajat kebebasan. Dalam Bab ini dipelajari getaran bebas dan paksa dari kedua sistem kebebasan yang teredam dan tidak teredam.

Suatu sistem dikatakan sebagai sistem kebebasan dua derajat (*two degrees of freedom/2DOF*) jika hanya memiliki dua koordinat independen/tidak tergantung yang diperlukan untuk mendefinisikan konfigurasi sistem secara utuh. Hal ini berbeda dengan SDOF dimana sistem hanya memerlukan satu koordinat independedn. Perbedaan antara SDOF dengan 2DOF tampak seperti pada Gambar 5.1 dan Gambar 5.2. Namun, penting untuk ditekankan bahwa rangkaian derajat kebebasan sistem tidak unik. Dua koordinat dapat dianggap sebagai derajat kebebasan selama itu independen.



SDOF *(b) 2DOF*

Gambar 5.1. Sistem getaran tidak teredam/undamped dengan (a) *SDOF* dan (b) *2DOF*



SDOF *(b) 2DOF*

Gambar 5.2. Sistem getaran teredam/damped dengan (a) *SDOF* dan (b) *2DOF*

Sistem dua derajat kebebasan adalah sistem yang membutuhkan dua koordinat untuk menggambarkan sepenuhnya persamaan geraknya. Koordinat ini disebut koordinat umum ketika beberapa variabel independen satu sama lain. Dengan demikian sistem dengan dua derajat kebebasan akan memiliki dua persamaan gerak dan karenanya memiliki dua frekuensi. Sistem kebebasan dua derajat berbeda dari sistem kebebasan tunggal, karena sistem ini memiliki dua frekuensi alami dan untuk masing-masing frekuensi alami ini terdapat keadaan alami getaran dengan konfigurasi perpindahan yang dikenal sebagaiNormal Mode. Istilah matematika terkait dengan jumlah ini dikenal sebagai nilai Eigen dan vektor Eigen. Ini didirikan dari dua persamaan gerak sistem secara simultan dan memiliki sifat dinamis tertentu yang terkait.

Suatu sistem yang memiliki dua derajat kebebasan adalah penting sejauh mereka memperkenalkan fenomena kopling di mana gerak salah satu dari dua koordinat independen juga tergantung pada gerakan koordinat lainnya melalui pegas kopling dan damper. Getaran bebas dua derajat sistem kebebasan pada titik mana pun adalah kombinasi dari dua harmonik dari dua frekuensi alami ini. Dalam kondisi tertentu, selama getaran bebas setiap titik dalam suatu sistem dapat melakukan getaran harmonik padasalah satu dari dua frekuensi alami dan amplitudo terkait dalam cara tertentu dan konfigurasi dikenal sebagai normal mode atau mode principal dari getaran. Dengan demikian sistem dengan dua derajat kebebasan memiliki dua mode getaran normal yang sesuai dengan dua frekuensi alami.

Getaran mekanis sistem tidak teredam dengan dua derajat kebebasan (2DOF):

Pertimbangkan sistem yang tidak teredam dengan dua derajat kebebasan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.3a, dimana massa dibatasi untuk bergerak ke arah sumbu pegas dan menjalankan getaran bebas. Perpindahan diukur dari posisi pegas yang tidak diregangkan. Masing *x1* dan *x2* merupakan perpanjangan dari *m1* dan *m2,* pada waktu tertentu yang diukur dari posisi kesetimbangan dengan *x2>x1*. Kemudian gaya pegas yang bekerja pada massa adalah seperti yang ditunjukkan secara free body diagram pada Gambar 5.3b.

Getaran tak teredam dengan *2DOF (Kasus 1)*

Gambar 5.3 menunjukan sistem getaran bebas tanpa redaman dengan dua derajat kebebasan sistem terdiri dari 2 pegas, 2 massa dan 1 tumpuan

Gambar 5.3. Sistem tidak teredam satu tumpuan dengan dua derajat kebebasan

Didasarkan pada persamaan Newton II tentang gerak:

$$\sum F = mg = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{5.1}$$

Untuk massa 1 bentuk persamaan sebagai berikut:

$$m_1\left[\frac{d^2x_1}{dt^2}\right] = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

$$m_1\left[\frac{d^2x_1}{dt^2}\right] = -k_1x_1 + k_2x_2 - k_2x_1$$

$$m_1\left[\frac{d^2x_1}{dt^2}\right] + k_1x_1 + k_2x_1 = k_2x_2$$

$$m_1\left[\frac{d^2x_1}{dt^2}\right] + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \tag{5.2}$$

Untuk massa 2 bentuk persamaan sebagai berikut:

$$m_2 \left[\frac{d^2x_2}{dt^2}\right] = -k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \left[\frac{d^2x_2}{dt^2}\right] = -k_2 x_2 + k_2 x_1$$

$$m_2 \left[\frac{d^2x_2}{dt^2}\right] + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \tag{5.3}$$

Diasumsikan bahwa gerak periodik dengan gerakan harmonik pada variasi amplitudo dan frekuensi tertentu, komponen tersebut dapat dinyatakan dengan:

$$x_1 = A \sin \omega t \;\text{ dan }\; x_2 = B \sin \omega t \tag{5.4}$$

Dari Pers. (5.4) Turunan tingkat 2 diperoleh:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t \;\text{ dan }\; \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega^2 B \sin \omega t \tag{5.5}$$

Dengan subtitusi Pers. (5.2) dan (5.3) pada Pers (5.4) diperoleh:

Persamaan (5.2): $m_1 \left[\frac{d^2x_1}{dt^2}\right] + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$

Menjadi:

$$-m_1\omega^2 A \sin \omega t + (k_1 + k_2)A \sin \omega t - k_2 B \sin \omega t = 0$$

$$A \sin \omega t \,(k_1 + k_2 - m_1\omega^2) - B \sin \omega t \,(k_2) = 0 \tag{5.6}$$

Persamaan (2): $m_2 \left[\frac{d^2x_2}{dt^2}\right] + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0$

Menjadi:

$$-m_2\omega^2 B \sin \omega t + k_2 B \sin \omega t - k_2 A \sin \omega t = 0$$

$$B \sin \omega t \,(k_2 - m_2\omega^2) - A \sin \omega t \,(k_2) = 0 \tag{5.7}$$

Sehingga persamaan gerak massa 1 dan 2 menjadi:

$$A \sin \omega t \,(k_1 + k_2 - m_1\omega^2) - B \sin \omega t \,(k_2) = 0 \tag{5.8}$$

$$B \sin \omega t\, (k_2 - m_2\omega^2) - A \sin \omega t\, (k_2) = 0 \tag{5.9}$$

dengan A dan B adalah amplitudo dari dua gerak harmonik, rasio harus selalu konstan dan tergantung terhadap waktu dengan demikian persamaan dapat ditulis, dengan tanpa menyertakan fungsi : $sin\, \omega\, t$

$$A(k_1 + k_2 - m_1\omega^2) - Bk_2 = 0 \tag{5.10}$$

$$-Ak_2 + B(k_2 - m_2\omega^2) = 0 \tag{5.11}$$

Dari kedua persamaan tersebut disusun sebuah matrik untuk penyelesaiannya, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Matrik tersebut menunjukan persamaan aljabar linier dengan solusi A=B=0 sebagai definisi kesetimbangan sistem. Untuk mendapatkan nilai A dan B determinan dari persamaan tersebut = 0

$$det. \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - (-k_2)(-k_2) = 0$$

$\rightarrow \quad k_1k_2 - k_1m_2\omega^2 + (k_2)^2 - k_2m_2\omega^2 + -k_2m_1\omega^2 + m_1m_2\omega^4 - (k_2)^2 = 0$

$\rightarrow \quad k_1k_2 - k_1m_2\omega^2 - k_2m_2\omega^2 + -k_2m_1\omega^2 - m_1m_2\omega^4 = 0$

$\rightarrow \quad k_1k_2 + (-k_1m_2 - k_2m_2 - k_2m_1)\omega^2 + m_1m_2\omega^4 = 0$

$\rightarrow \quad k_1k_2 + ((-k_1-k_2)m_2-k_2m_1)\omega^2 + m_1m_2\omega^4 = 0$

$\rightarrow \quad m_1m_2\omega^4+((-k_1-k_2)m_2 - k_2m_1)\omega^2 + k_1k_2 = 0$ dibagi dengan m_1m_2

$\rightarrow \quad \omega^4 - (\frac{(k_1+k_2)}{m_1\,m_2} + \frac{k_2)}{m_1m_2})\omega^2 + \frac{k_1k_2}{} = 0$

Catatan: Penyelesaian persamaan kuadrat: $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\rightarrow \quad \omega^4 - (\frac{(k_1+k_2)}{m_1\,m_2} + \frac{k_2)}{m_1m_2})\omega^2 + \frac{k_1k_2}{} = 0$

$$\rightarrow \quad \boxed{\omega_1^2\ dan\ \omega_2^2 = \frac{(\frac{(k_1+k_2)}{m_1}+\frac{k_2)}{m_2}) \pm\sqrt{(\frac{(k_1+k_2)}{m_1}+\frac{k_2)}{m_2})^2-4(1)(\frac{k_1k_2}{m_1m_2})}}{2}}$$

Sehingga solusi secara umum persamaan getaran adalah gerak harmonik berupagelombang:

Untuk massa 1$\rightarrow x_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$

Untuk massa 2$\rightarrow x_2 = B_1 \sin \omega_1 t + B_2 \sin \omega_2 t$

A dan B merupakan konstanta dengan rasio A dan B

$A(k_1 + k_2 - m_1\omega^2) - Bk_2 = 0 \quad \rightarrow A(k_1 + k_2 - m_1\omega^2) = Bk_2 \qquad (1)$

$-Ak_2 + B(k_2 - m_2\omega^2) = 0 \qquad \rightarrow Ak_2 = B(k_2 - m_2\omega^2) \quad (2)$

$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_2}{k_1+k_2-m_1\omega^2{}_1} = \frac{1}{1} \rightarrow A_1\lambda_1 = B_1$ dan $\frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2-m_2\omega_2^2}{k_2} = \frac{1}{2} \rightarrow A_2\lambda_2 = B_2$

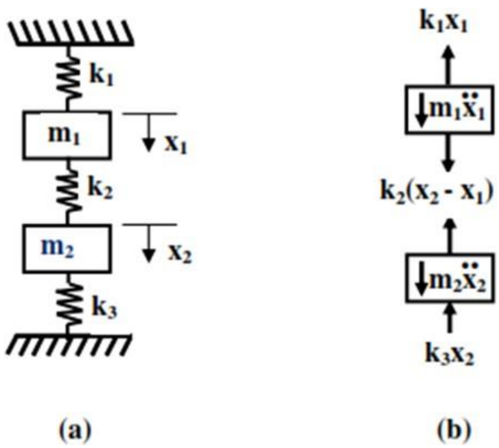
Solusi umum untuk persamaan gerak massa 1 dan massa 2 (*2DOF*) adalah:

Untuk massa 1→ $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$

Untuk massa 2→ $x_2 = A_1\lambda_1 \sin \omega_1 t + A_2\lambda_2 \sin \omega_2 t$

Getaran tak teredam dengan *2DOF (Kasus 2)*

Gambar 5.4 menunjukan sistem getaran bebas tanpa redaman dengan dua derajat kebebasan dengan 3 pegas, 2 massa dan 2 tumpuan



Gambar 5.4. Sistem tidak teredam dua tumpuan dengan dua derajat kebebasan

Didasarkan pada persamaan Newton ke dua tentang gerak:

$$\sum F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Untuk massa 1 bentuk persamaan sebagai berikut:

$$m_1 \left[\frac{d^2x_1}{dt^2}\right] = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_1 \left[\frac{d^2x_1}{dt^2}\right] = -k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1$$

$$m_1 \left[\frac{d^2x_1}{dt^2}\right] + k_1 x_1 + k_2 x_1 = k_2 x_2$$

$$m_1 \left[\frac{d^2x_1}{dt^2}\right] + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \qquad (5.13)$$

Untuk massa 2 bentuk persamaan sebagai berikut:

$$m_2 \left[\frac{d^2x_2}{dt^2}\right] = -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \left[\frac{d^2x_2}{dt^2}\right] = -k_3 x_2 - k_2 x_2 + k_2 x_1$$

$$m_2 \left[\frac{d^2x_2}{dt^2}\right] + k_3 x_2 + k_2 x_2 = k_2 x_1$$

$$m_2 \left[\frac{d^2x_2}{dt^2}\right] + (k_3 + k_2) x_2 - k_2 x_1 = 0 \qquad (5.14)$$

Diasumsikan bahwa gerak periodik dengan gerakan harmonik pada variasi amplitudo dan frekuensi tertentu, komponen tersebut dapat dinyatakan dengan:

$$x_1 = A \sin \omega t \text{ dan } x_2 = B \sin \omega t \qquad (5.15)$$

Dari persamaan (5.15) Turunan tingkat 2 diperoleh:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t \text{ dan } \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega^2 B \sin \omega t$$

Dimana *A* dan *B* adalah amplitudo getaran dari masing-masing kedua massa dalam kondisi steady state. Subtitusi persamaan (5.15) ke persamaan (5.13) diperoleh:

$$m_1 \left[\frac{d^2x_1}{dt^2}\right] + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \qquad (5.16)$$

$$-m_1\omega^2 A \sin \omega t + (k_1 + k_2) A \sin \omega t - k_2 B \sin \omega t = 0$$

$$A(-m_1\omega^2 \sin \omega t + (k_1 + k_2) \sin \omega t) - Bk_2 \sin \omega t = 0 \qquad (5.16a)$$

Subtitusi persamaan (5.15) ke persamaan (5.14) diperoleh:

$$m_2 \left(\left[\frac{d^2x_2}{dt^2}\right] + k_3 + k_2\right) x_2 - k_2 x_1 = 0 \qquad (5.17)$$

$$-m_2\omega^2 B \sin \omega t + (k_3 + k_2) B \sin \omega t - k_2 A \sin \omega t = 0$$

$$A(-k_2 \sin \omega t) + B(-m_2\omega^2 \sin \omega t + (k_3 + k_2) \sin \omega t = 0 \qquad (5.17a)$$

Dengan A dan B adalah amplitudo dari dua gerak harmonik, rasio harus selalu konstan dan tergantung terhadap waktu dengan demikian persamaan dapat ditulis, dengan tanpa menyertakan fungsi : sin $\omega\, t$ persamaan (5.16a) dan (5.17a) menjadi:

$A(+k_1 + k_2 - m_1\omega^2) - Bk_2 = 0$

$A(-k_2) + B(+k_3 + k_2 - m_2\omega^2) = 0$

Dari kedua persamaan tersebut disusun sebuah matrik untuk penyelesaiannya, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrik tersebut menunjukan persamaan aljabar linier dengan solusi A=B=0 sebagai definisi kesetimbangan sistem. Untuk mendapatkan nilai A dan B determinan dari persamaan tersebut = 0

$$det. \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_3 + k_2 - m_2\omega^2) - (-k_2)(-k_2) = 0$

$\rightarrow k_1k_3 + k_1k_2 - k_1m_2\omega^2 + +k_2k_3 + k_2^2 - k_2m_2\omega^2 - k_3m_1\omega^2 - k_2m_1\omega^2 + m_1m_2\omega^4 - k_2^2 = 0$

$\rightarrow m_1m_2\omega^4 + (-k_1m_2 - k_2m_2 - k_3m_1 - k_2m_1)\omega^2 + (k_1k_3 + k_1k_2 + k_2k_3) = 0$

$\rightarrow m_1m_2\omega^4 - (k_1m_2 + k_2m_2 + k_3m_1 + k_2m_1)\omega^2 + (k_1k_3 + k_1k_2 + k_2k_3) = 0$

$\rightarrow m_1m_2\omega^4 - ((k_1 + k_2)m_2 + (k_3 + k_2)m_1)\omega^2 + (k_1k_3 + k_1k_2 + k_2k_3) = 0$

$$\omega^4 - \left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2}\right]\omega^2 + (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3) = 0$$

$$\rightarrow \omega_1^2 \text{ dan } \omega_2^2 = \frac{\left(\frac{(k_1+k_2)}{m_1} + \frac{(k_2+k_3)}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{(k_1+k_2)}{m_1} + \frac{(k_2+k_3)}{m_2}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{(k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3)}{m_1m_2}\right)}}{2}$$

Dari analisis persamaan dikriminasi menunjukan bahwa penyelesaian berupa bilangankomplek, dimana:

$$\left(\frac{(k_1+k_2)}{m_1}+\frac{(k_2+k_3)}{m_2}\right)^2-4(1)\left(\frac{(k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3)}{m_1m_2}\right)<0$$

Sehingga solusi secara umum persamaan getaran adalah gerak harmonik berupagelombang:

Untuk massa 1→ $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$

Untuk massa 1→ $x_2 = B_1 \sin \omega_1 t + B_2 \sin \omega_2 t$

A dan B merupakan konstanta dengan rasio A dan B ditentukan dari persamaan (1a) dan (2a)

$$A_1(+k_1 + k_2 - m_1\omega^2) - B_1k_2 = 0 \rightarrow A_1(+k_1 + k_2 - m_1\omega^2) = B_1k_2$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_2}{k_1+k_2-m_1\omega^2{}_1} = \frac{k_3+k_2-m_2\omega^2{}_1}{k_2} = \frac{1}{1}$$

$$A_2(k_2) + B_2(+k_3 + k_2 - m_2\omega^2) = 0 \rightarrow A_2(k_2) = B_2(+k_3 + k_2 - m_2\omega^2)$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2}{k_1+k_2-m_1\omega^2{}_2} = \frac{k_3+k_2-m_2\omega^2{}_2}{k_2} = \frac{1}{2}$$

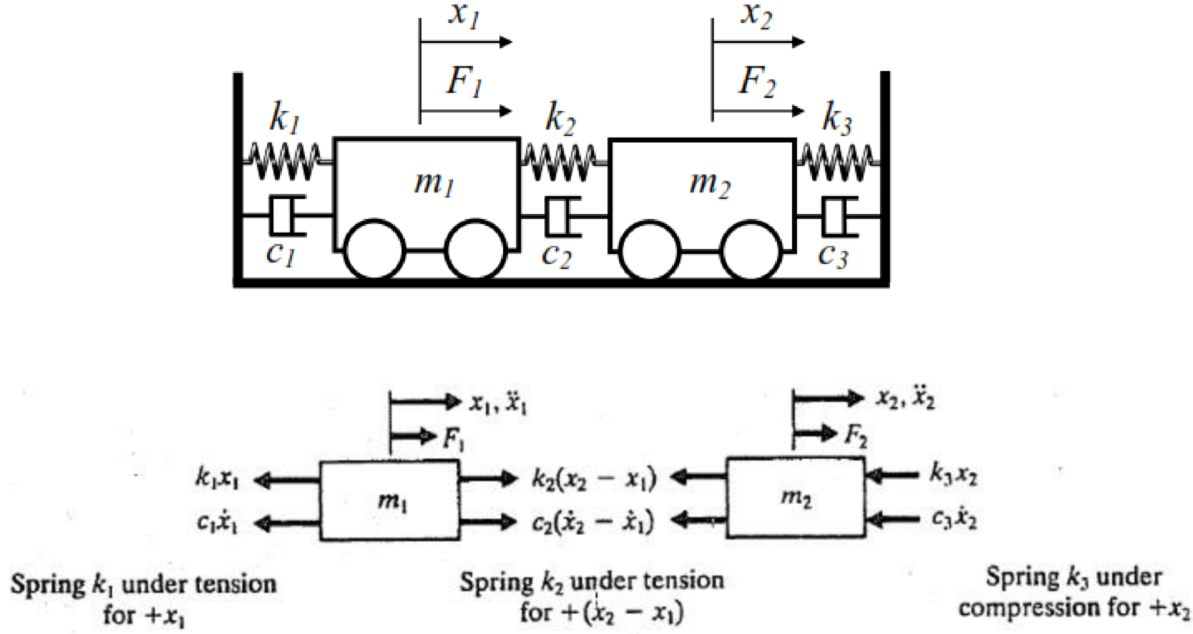
Solusi umum untuk persamaan gerak massa 1 dan massa 2 (2DOF) adalah:

Untuk massa 1→ $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$

Untuk massa 2→ $x_2 = A_1\lambda_1 \sin \omega_1 t + A_2\lambda_2 \sin \omega_2 t$

BAB VII
GETARAN TEREDAM PADA DUA DERAJAT KEBEBASAN

Jumlah derajat kebebasan (DOF) dari suatu sistem adalah jumlah koordinat independen yang diperlukan untuk mendefinisikan gerakan. Jumlah DOF sama dengan jumlah massa yang dikalikan dengan jumlah independen setiap massa dapat bergerak. Pertimbangkan sistem 2 DOF getaran teredam yang ditunjukkan pada Gambar 6.1.



Gambar 6.1. Sistem teredam satu tumpuan dengan dua derajat kebebasandidasarkan pada

persamaan Newton II tentang gerak $\sum F = mg = m\frac{d^2x}{dt^2}$, maka

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + k_2\left(x_2 - x_1\right) + c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_3x_2 - c_3\dot{x}_2 - k_2\left(x_2 - x_1\right) - c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + F_2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + \left(c_1 + c_2\right)\dot{x}_1 + \left(k_1 + k_2\right)x_1 - c_2\dot{x}_2 - k_2x_2 &= F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + \left(c_2 + c_3\right)\dot{x}_2 + \left(k_2 + k_3\right)x_2 - c_2\dot{x}_1 - k_2x_1 &= F_2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad (6.3)$$

Jika

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad (6.4)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \qquad (6.5)$$

Selanjutnya

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\}=\{F\} \qquad (6.6)$$

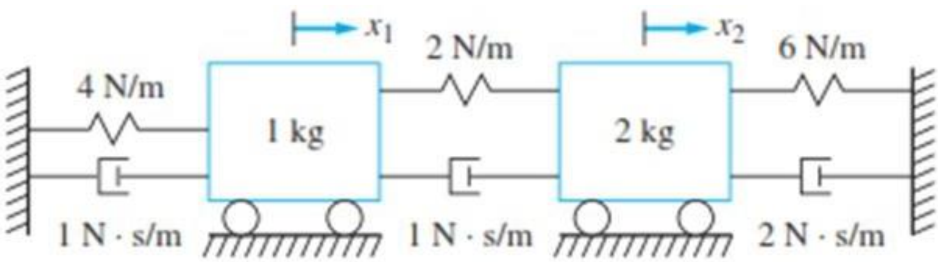
Contoh Soal

Tentukan respon dari suatu sistem seperti pada Gambar 6.2 sebagai fungsi $x_1(t)$ dan $x_2(t)$, dengan kondisi pada $x_2(t) = 2\frac{m}{c}$ dan semua kondisi sama dengan nol, pergerakan

diberikan pada massa ke dua dengan kecepatan awal 2 m/s

$k_1 = 4\,{}^{N}/_{m}$, $k_2 = 2\,{}^{N}/_{m}$, $k_3 = 6\,{}^{N}/_{m}$,

$c_1 = 1\,{}^{N.s}/_{m}$, $c_2 = 1\,{}^{N.s}/_{m}$, $c_3 = 2\,{}^{N.s}/_{m}$,



Gambar 6.2.

Penyelesaian

→ Differensial dari persamaan gerak sistem tersebut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

→ Asumsikan peneyelesaian dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \chi \end{bmatrix} e^{\lambda t} \qquad \text{(b)}$$

→ Nilai λ yang merupakan penyelesaian non-trivial pers. (b) adalah akar akar dari

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 6 & -\lambda - 2 \\ -\lambda - 2 & 2\lambda^2 + 3\lambda + 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(c)}$$

Evaluasi determinan didapatkan

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 6)(2\lambda^2 + 3\lambda + 8) - (\lambda + 2)^2 = 0 \qquad \text{(d)}$$

→ Akar persamaan dari persamaan order 4 adalah

$\lambda = -0{,}5122 \pm 1{,}7436\mathrm{i} - 1{,}2378 \pm 2{,}2648\mathrm{i}$

→ Sistem bergetar dengan frekuensi

$\omega 1 = 1{,}7436 \ dan \ \omega 2 = 2{,}2468$

→ Model bilangan kompleknya ditentukan dari bentuk berikut

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 6 & -\lambda - 2 \\ -\lambda - 2 & 2\lambda^2 + 3\lambda + 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(e)}$$

→ Kedua persamaan yang direpresentasikan oleh pers (e) untuk nilai λ yang telah didapatkan sebelumnya adalah *dependent*, sehingga hanya persamaan pertama yang digunakan

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 6) - (\lambda + 2)\chi = 0 \qquad \text{(f)}$$

atau

$$\chi = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 6}{\lambda + 2} \quad \text{(g)}$$

→ Untuk $\lambda = -0{,}5122 - 1{,}7436\text{i}$, persamaan (g) menjadi

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{(-0.5122 - 1.7436i)^2 + 2(-0.5122 - 1.7436i) + 6}{2 - 0.5122 - 1.7436i} \\ &= (1.817 + 0.248i) \end{aligned} \quad \text{(h)}$$

Untuk $\lambda = -0{,}5122 + 1{,}7436\text{i}$, maka $3 = (1{,}817 - 0{,}248\text{i}$

Untuk $\lambda = -1{,}2378 \pm 2{,}2648\text{i}$, maka i $3 = (-0{,}435 \pm 0{,}115\text{i}$

→ Response yang terjadi dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= e^{-0.5122t}\left(C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1.817 - 0.248i \end{bmatrix}e^{i1.7436t} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1.817 + 0.248i \end{bmatrix}e^{-i1.7436t}\right) \\ &+ e^{-1.2378t}\left(C_3\begin{bmatrix} 1 \\ -0.435 - 0.115i \end{bmatrix}e^{i2.2468}C_4\begin{bmatrix} 1 \\ -0.435 + 0.115i \end{bmatrix}e^{-i2.2468}\right) \end{aligned} \quad \text{(i)}$$

atau

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-0.5122t}\Bigg\{&A_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1.817 \end{bmatrix}\cos 1.744t - \begin{bmatrix} 0 \\ 0.248 \end{bmatrix}\sin 1.744t\right) \\ &+ A_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1.817 \end{bmatrix}\sin 1.744t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.248 \end{bmatrix}\cos 1.744t\right)\Bigg\} \\ &+ e^{-1.2378t}\Bigg\{A_3\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -0.435 \end{bmatrix}\cos 2.247t - \begin{bmatrix} 0 \\ -0.115 \end{bmatrix}\sin 2.247t\right) \\ &+ A_4\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -0.435 \end{bmatrix}\sin 2.247t + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.115 \end{bmatrix}\cos 2.247t\right)\Bigg\} \end{aligned} \quad \text{(j)}$$

→ Dengan memasukkan kondisi awal, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1.817 & 0.248 & -0.435 & -0.115 \\ -0.5122 & 1.744 & -1.238 & 2.247 \\ -1.390 & 3.295 & 0.871 & -0.258 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \qquad \text{(k)}$$

→ Penyelesaian persamaa (k) adalah A1 = 4,49, A2 = -1,95, A3 = -2,12, dan A3 = 3,29.

Selenajutnya dengan mensubstitusikan hasil ini ke persamaan (i), maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-0.512t}\left(\begin{bmatrix} 4.49 \\ 7.68 \end{bmatrix}\cos 1.74t + \begin{bmatrix} -1.95 \\ -4.66 \end{bmatrix}\sin 1.74t\right)$$

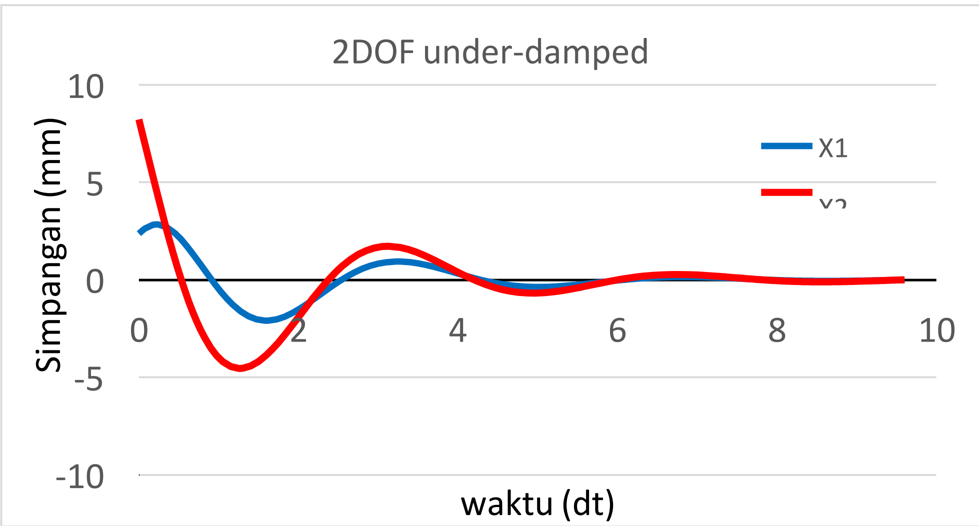
$$+ e^{-1.237t}\left(\begin{bmatrix} -2.13 \\ 0.54 \end{bmatrix}\cos 2.25t + \begin{bmatrix} 3.29 \\ -1.67 \end{bmatrix}\sin 2.25t\right) \qquad \text{(l)}$$

→ Penyelesaian akhir berupa persamaan getaran adalah:

$x_1(t) = e^{-0,512t}\,(4,49\cos 1,74t - 1.95\sin 1,74t) + e^{-1,237t}\,(-2,13\cos 2,25t + 3,29\sin 2,25t$

$x_2(t) = e^{-0,512t}\,(7,68\cos 1,74t - 4,66\sin 1,74t) + e^{-1,237t}\,(0,54\cos 2,25t - 1,67\sin 2,25t$

→ Grafik getaran merupakan getaran teredam seperti pada Gambar 6.3



Gambar 6.3. Response x_1 dan x_2

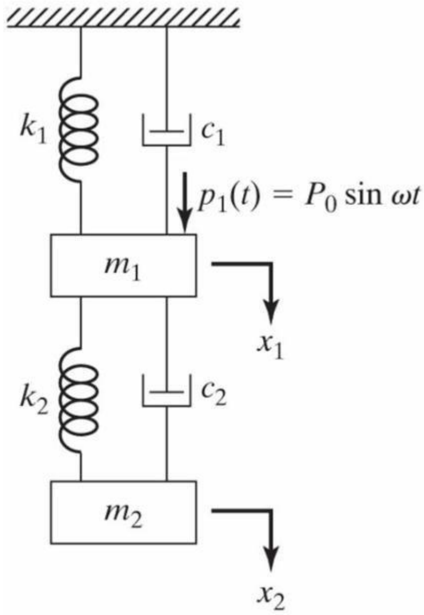
Latihan Soal

Gambar 6.4 adalah sistem 2-DOF teredam. Fungsi gaya harmonic hanya diberikan ke massa 1. K1 = 1000 N/m, C1 = 10 Ns/m, K2 = 2000 N/m, C2 = 10 Ns/m, m1 = 10 kg,m2 = 10 kg, P0 = 100 dan w 10 rad/s, maka

Tuliskan persamaan geraknya dalam bentuk matrix

Carilah nilai eigenvalues dan eigenvectors dari sistem dengan menggunakanMATLAB "ieg" command

Plot response x_1 dan x_2 sistem



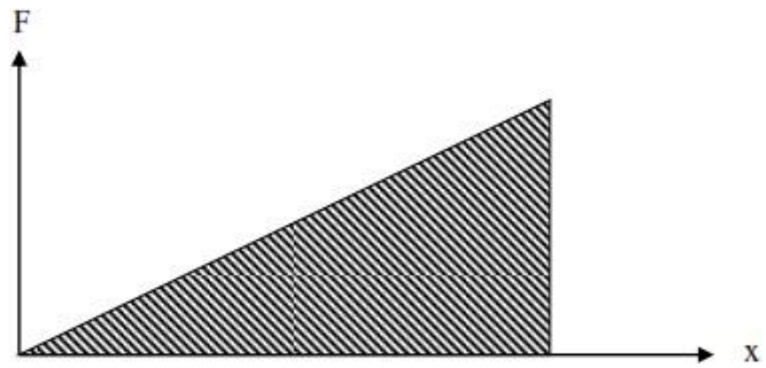
Gambar 6.4. Sistem 2 DOF

BAB VIII
KONSTANTA KEKAKUAN BENDA RIGID

Elastisitas

Elastisitas adalah kemampuan suatu material untuk kembali ke bentuk semula, baik ukuran maupun posisi, jika material tersebut ditekan, ditarik, atau diberi gaya deformasi lainnya. Bila suatu pegas linier dikenai gaya sebesar F di mana pegas mempunyai kekakuan k maka pegas akan terdefleksi. Misalkan defleksi pegas sebesar x, maka akan berlaku hubungan linier seperti pada persamaan (7.1).

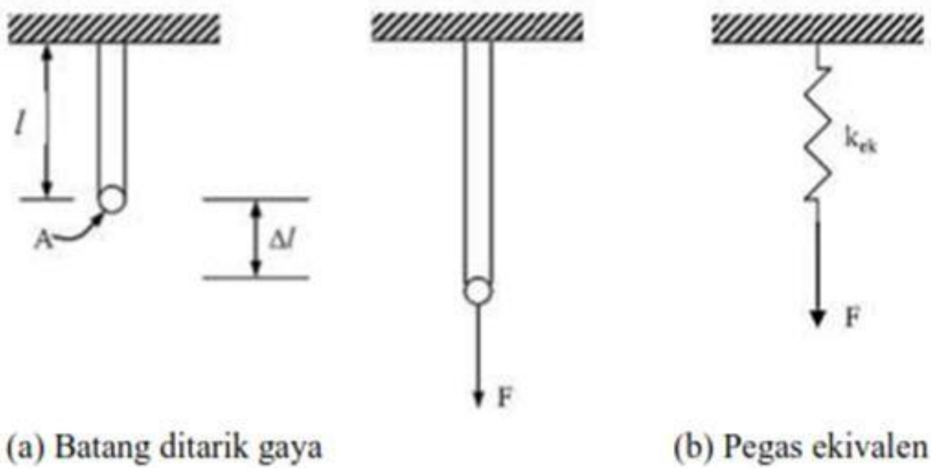
$$F = k.\Delta x \tag{7.1}$$



Gambar 7.1. Hubungan gaya dan defleksi

Jika kita plot grafik hubungan F dengan x akan terbentuk garis miring yang linier, luasandi bawah garis miring pada x yang tertentu merupakan energi potensial pegas (U), seperti terlihat pada Gambar 7.1.

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.2}$$



Gambar 7.2. Batang ditarik gaya (F) sebagai pegas ekivalen

Tegangan (σ) dapat didefinisikan sebagai perbedaan tekanan. Terdapat berbagaimacam tekanan, yaitu tekanan hidrostatis untuk kasus di dalam air atau tekanan litostatis untuk kasus lapisan di dalam Bumi. Jika **tekanan** merupakan gaya yang dikenakan pada suatu material setiap luasannya maka definisi ini dapat dituliskan dalam bentuk persamaan:

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad (7.3)$$

Di mana: F adalah gaya (N), A adalah luas permukaan (m^2). Oleh sebab itu tegangan juga memiliki satuan gaya per satuan luas. Satuan SI dari tegangan adalah:

1 pascal (Pa) = 1 N m^{-2}

Jika 1 newton (N) = 1 km m s^{-2} = 10^5 dyne, maka tegangan dapat dinyatakan dalam satuan lain, yaitu bar.

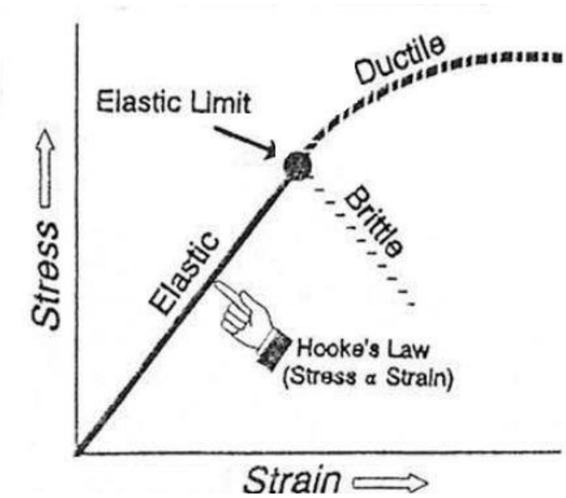
1 bar = 10^5 Pa

Secara umum terdapat tiga macam tegangan, yaitu tegangan kompresional (menekan), tegangan tensional (meregang), dan tegangan *shear* (menggeser).

Sementara itu **regangan (e)** atau **(ε)** merupakan perbandingan antara perubahanvolume suatu benda yang terjadi setelah diberi tegangan terhadap volume awal benda itu sebelum diberi tegangan. Secara lebih sederhana, regangan berarti perubahan volume atau panjang yang terjadi jika benda diberi tegangan. Tentunya, regangan tidak memiliki satuan karena regangan hanya merupakan rasio. Hubungan keduanya secara umum dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$s = \frac{\Delta l}{Lo} \tag{7.4}$$

merupakan tensor elastis yang menyatakan sifat suatu medium. Tensor ini tidak bergantung pada besarnya tegangan maupun regangan. Baik tegangan maupun regangan ini juga mampu menggambarkan sifat keelastisan suatu material. Perlu dicatat bahwa tidakselamanya suatu benda bersifat elastis. **Hukum Hooke** menjelaskan bahwa benda disebut elastis jika besar regangan yang terjadi berbanding lurus dengan besar tegangan yang diberikan. Batas dari keelastisan suatu benda ini dikenal sebagai *elastic limit*. Jika benda masih diberikan tegangan hingga melebihi *elastic limit*, maka benda tidak mampu lagi kembali ke bentuk semula. Benda akan menjadi *ductile* (benda mampu mengalir danmudah dipintal) atau menjadi *brittle* (rapuh dan mudah patah, seperti pensil yang patah).



Gambar 7.3. Hubungan tegangan dan regangan.

Benda disebut elastis jika mematuhi hukum Hooke: tegangan berbanding lurus dengan regangan

$$s = \frac{\Delta l}{Lo},\ \sigma = \frac{F}{A},\ E = \frac{\sigma}{s} \tag{7.5}$$

$$E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta l}{Lo}} \rightarrow E = \frac{F.Lo}{A.\Delta l} \quad (7.6)$$

$$\Delta l = \Delta x, \qquad E = \frac{Lo}{A} \cdot \frac{F}{\Delta x} \quad (7.7)$$

$$\frac{F}{\Delta x} = k \quad (7.8)$$

$$k = \frac{E.A}{Lo} \quad (7.9)$$

Dimana:

k = kontanta pegas batang rigid (N/m)E =

modulus elastiditas (N/m^2)

Lo = panjang batang awal (m)

A = luas penampang batang (m^2)

Contoh Soal

1. Batang AB pada crane terlihat pada Gambar 7.4(a) adalah batang homogen yang panjangnya 10 m dan luas penampangnya 2500 mm2. Kabel CDEBF terbuat dari baja dan mempunyai luas penampang 100 mm2. Jika efek kabel CDED diabaikan, maka hitunglah konstanta kekakuan ekivalen dalam arah vertikal

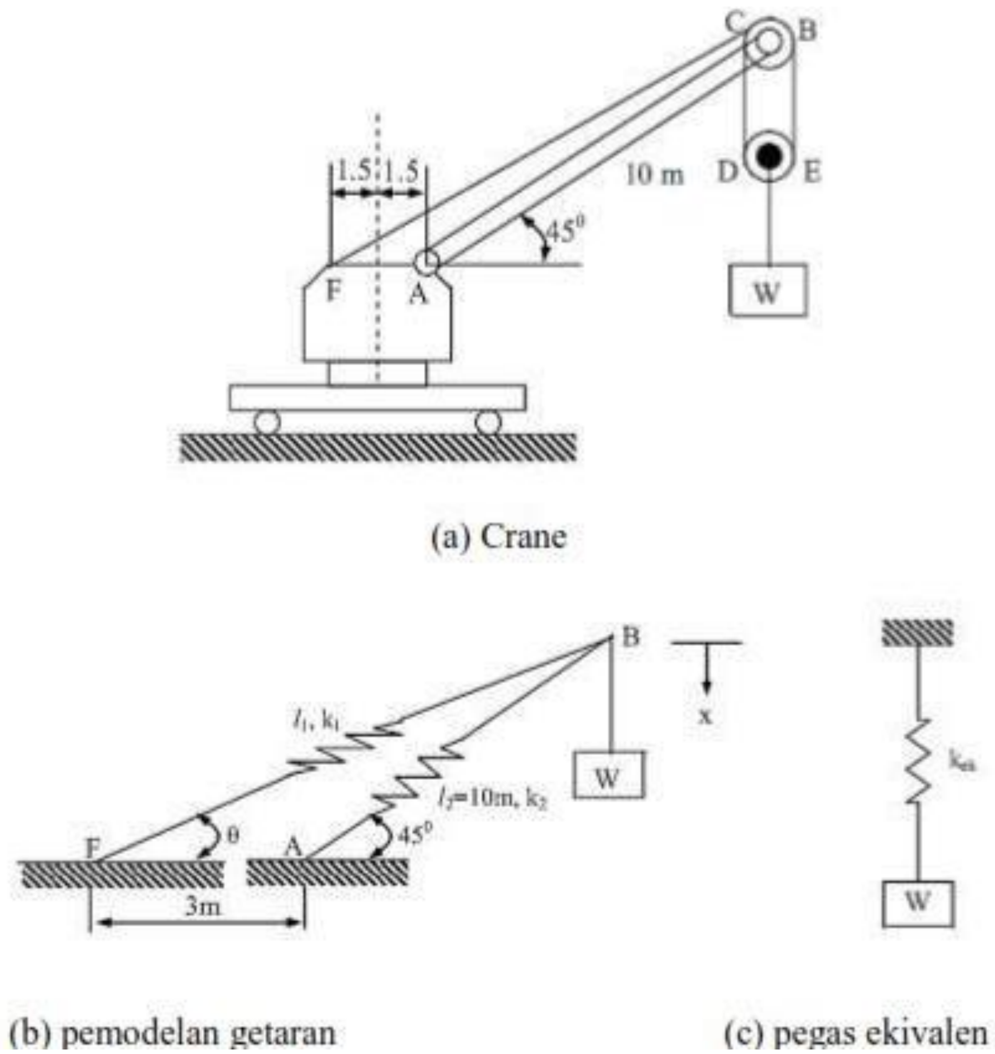
Penyelesaian

Selama landasan crane kaku, kabel dan batang akan tetap berada pada posisi F dan A. Dengan mengabaikan efek kabel CDEB, maka berat W bekerja di titik B seperti terlihat pada Gambar 7.4(b). Simpangan vertical x meneybabkan batang denagn kekakuan pegas k2 akan terdeformasi sejauh x2 = x cos 45º dan kabel dengan kekakuan k1 akan terdeformasi sejauh x1 = cos (90-θ). Panjang kabel FB, l1 pada Gambar 7.4(b) adalah

$$l_1^2 = 3^2 + 10^2 - 2(3)(10)\cos 135^0 = 151.426, \text{ sehingga } \; l_1 = 12.3055 \text{ m}$$

Sudut θ diberikan dari

$$l_1^2 + 3^2 - 2(l_1)(3)\cos\theta = 10^2, \text{ sehingga } \cos\theta = 0.8184, \text{ dan } \theta = 35.0736^0$$



Gambar 7.4. *Crane*

→ Energi potential total (U) yang disebabkan oleh k1 dan k2 adalah

$$U = \tfrac{1}{2}\,k_1\,(x \cos 45^0)^2 + \tfrac{1}{2}\,k_2[x \cos (90 - \theta)]^2 \qquad \text{di mana}$$

$$k_1 = \frac{A_1E_1}{l_1} = \frac{(100 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{12{,}3055} = 1{,}6822 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$k_2 = \frac{A_2E_2}{l_2} = \frac{(2500 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{10} = 5{,}175 \times 10^7 \text{ N/m}$$

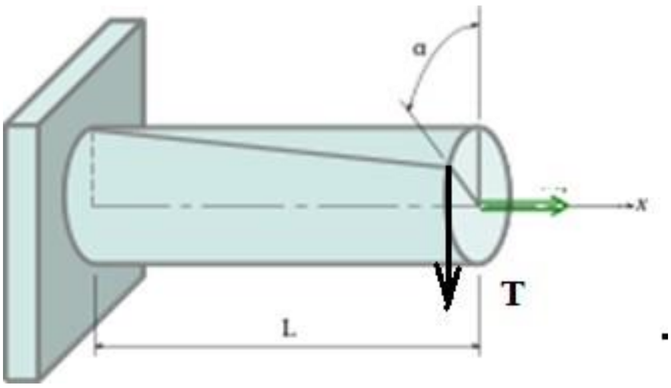
→ Bila pegas ekivalen arah vertikal terdeformasi sejauh x, Enegi Potensial pegas ekivalen (Uek) diberikan

$$U_{ek} = \frac{1}{2} k_{ek} x^2$$

→ Dengan mengambil U = Uek, maka diperoleh konstanta pegas ekivalen sistem
K_{ek} = 26,4304 x 10^6 N/m

Kekakuan Batang Torsi

Gambar 7.5 adalah sebuah batang rigid dengan memiliki panjang L serta pada ujungnya terjadi torsi T.



Gambar 7.5. Batang rigid

Jika θ adalah sudut punter (rad), G adalah Modulus kekakuan (modulus geser) darimaterial, *J* adalah Inersia polar, batang rigid tersebut rigid mungkin juga memiliki konstanta pegas pintiran k yang diberikan oleh Pers. (7.10)

$$GJ = \frac{TL}{\theta} \qquad \frac{GJ}{L} = \frac{T}{\theta}$$

$$k = \frac{T}{\theta} \tag{7.10}$$

Hubungan dengan elastisitas

Modulus elastisitas suatu material tidak sama dengan kekakuan suatu komponen yang terbuat dari material tersebut. Modulus elastis adalah properti dari bahan penyusunnya; kekakuan adalah sifat dari suatu struktur atau komponen struktur, dan karenanya tergantung pada berbagai dimensi fisik yang menggambarkan komponen itu. Artinya,modulus adalah properti intensif dari bahan; kekakuan, di sisi lain, adalah sifat luas dari benda padat yang tergantung pada bahan *dan* bentuk serta kondisi batasnya. Misalnya, untuk elemen dalam ketegangan atau kompresi, kekakuan aksial adalah

(7.11) $$k = E \cdot \frac{A}{L}$$

Demikian pula, kekakuan torsional dari bagian lurus

(7.12) $$k = G \cdot \frac{J}{L}$$

Pegas spiral

Pegas koil heliks digunakan dalam aplikasi seperti mesin industri dan sistem suspensi kendaraan. Pertimbangkan pegas yang diproduksi dari batang melintang melingkar dengan diameter D. Modulus geser batang adalah G. Batang dibentuk menjadi koil dengan putaranN putaran jari-jari r. Diasumsikan bahwa jari-jari kumparan jauh lebih besar dari jari-jari batang dan bahwa normal untuk bidang satu kumparan hampir bertepatan dengan sumbu pegas. Pertimbangkan pegas koil pegas ketika mengalami beban aksial F. Bayangkan memotong batang dengan pisau di lokasi yang sewenang-wenang dalam kumparan, mengiris pegas menjadi dua bagian. Pemotongan memperlihatkan gaya geser internal Fdan torsi penahan internal Fr, seperti digambarkan dalam

Gambar 7.6. Pegas spiral

Pegas dikenakan gaya F sepanjang sumbunya. Bagian potongan pegas mengungkapkan penampang memiliki geser gaya F dan torsi Fr di mana r adalah radius kumparan. Gambar

Dengan asumsi perilaku elastis, tegangan geser akibat torsi penahan bervariasi secaralinier dengan jarak dari pusat batang ke maksimum.

$$\tau_{\max} = \frac{FrD}{2J} = \frac{16\,Fr}{\pi D^3}$$
(7.13)

$J = \pi D^4/32$ dimana momen kutub inersia batang. Tegangan geser akibat gaya geser bervariasi secara nonlinier dengan jarak dari sumbu netral. Untuk tegangan geser maksimum karena gaya geser internal jauh lebih kecil daripada tegangan geser maksimum karena torsi penahan, dan efeknya diabaikan. Prinsip mekanisa material dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa perubahan total panjang pegas akibat gaya F yang diterapkan

$$x = \frac{64Fr^3N}{GD^4}$$
(7.14)

Membandingkan Persamaan (7.13) dengan Persamaan (7.14) maka pegas helik/sspiraldapat dimodelkan sebagai pegas linear dengan kekakuan

$$k = \frac{GD^4}{64Nr^3}$$
(7.15)

Contoh soal

Pegas yang tertutup rapat terbuat dari batang berdiameter 0,2% C berdiameter 20 mm (G =80 x 10^9 N/ m^2). Diameter kumparan adalah 20 cm. Musim semi memiliki 30 kumparan. Hitunglah!

Kekuatan terbesar yang dapat diterapkan sehingga kekuatan elastis dalam geser 220 x 106 N/m^2 tidak terlampaui!

Total perubahan panjang pegas ketika gaya maksimal diterapkan!

Penyelesaian:

Dengan asumsi tegangan geser karena gaya geser dapat diabaikan, tegangan geser maksimum pada pegas ketika gaya F diterapkan adalah

$$\tau = \frac{FrD}{2J} = F\frac{(0.1\ \text{m})(0.02\ \text{m})}{\frac{2\pi}{32}(0.02\ \text{m})^4} = 6.37 \times 10^4 F$$

Jadi kekuatan maksimum yang diijinkan adalah

$$F_{max} = \frac{220 \times 10^6 \text{ N/m}^2}{6.37 \times 10^4} = 3.45 \times 10^3 \text{N}$$

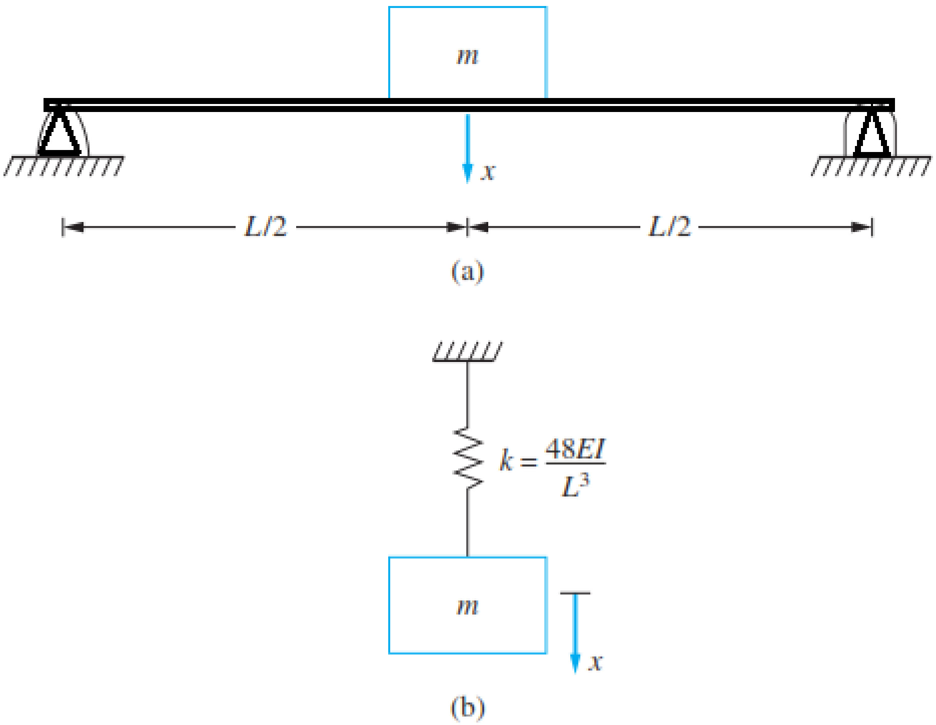
Kekakuan pegas ini dihitung dengan menggunakan konstanta pegas spiral

$$k = \frac{(80 \times 10^9 \text{N/m}^2)(0.02\text{m})^4}{(64)(30)(0.1\text{m}^3)} = 6.67 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Total perubahan panjang pegas karena penerapan gaya maksimum yang diijinkan adalah

$$\Delta x = \frac{F}{k} = 0.518 \text{ m}$$

Kontanta pegas pada batang dengan dua tumpuan



Gambar 7.7. Kunstuksi balok dengan dua tumpuan

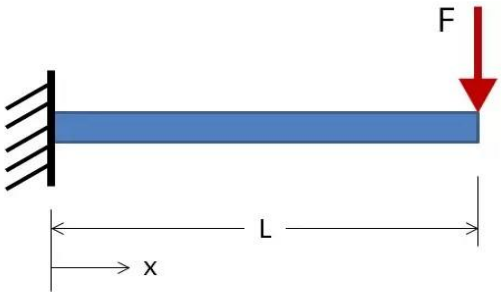
Gerakan partikel yang melekat pada elemen elastis dapat dimodelkan sebagai partikel yang melekat pada pegas linier, asalkan massa elemen lebih kecil dibandingkan dengan massa partikel dan hubungan linear antara gaya dan perpindahan ada untuk elemen tersebut. Pada Gambar 7.7, sebuah partikel bermassa m melekat pada *midspan* dari balok panjang L yang didukung, modulus elastis E, dan momen penampang inersia I. Perpindahan melintang dari *midspan* balok akibat statis yang diterapkan beban F adalah

$$x = \frac{L^3}{48EI}F \qquad (7.16)$$

Jadi ada hubungan linear antara perpindahan melintang dan beban statis. Oleh karena itu jika massa balok kecil, getaran partikel dapat dimodelkan sebagai gerakan vertikal partikel yang melekat pada pegas kekakuan.

$$k = \frac{48EI}{L^3} \qquad (7.17)$$

Batang Kentilever



Kekakuan balok kantilever adalah

$$k = \frac{3\,EI}{L^3} \qquad (7.18)$$

Contoh Soal

Mesin 200 kg dipasang pada ujung balok penopang dengan panjang L = 2,5 m, modulus elastis E= 200×10^9 N/m^2, dan momen penampang inersia 1,8×10^{-6} m^4 Dengan asumsi massa balok kecil dibandingkan dengan massa mesin, hitunglah kekakuan balok?

Penyelesaian:

$$k = \frac{3\,EI}{L^3} = \frac{3\,(200 \times 10^9\ \text{N/m}^2)\,(1.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)}{(2.5\ \text{m})^3} = 6.91 \times 10^4\ \text{N/m}$$

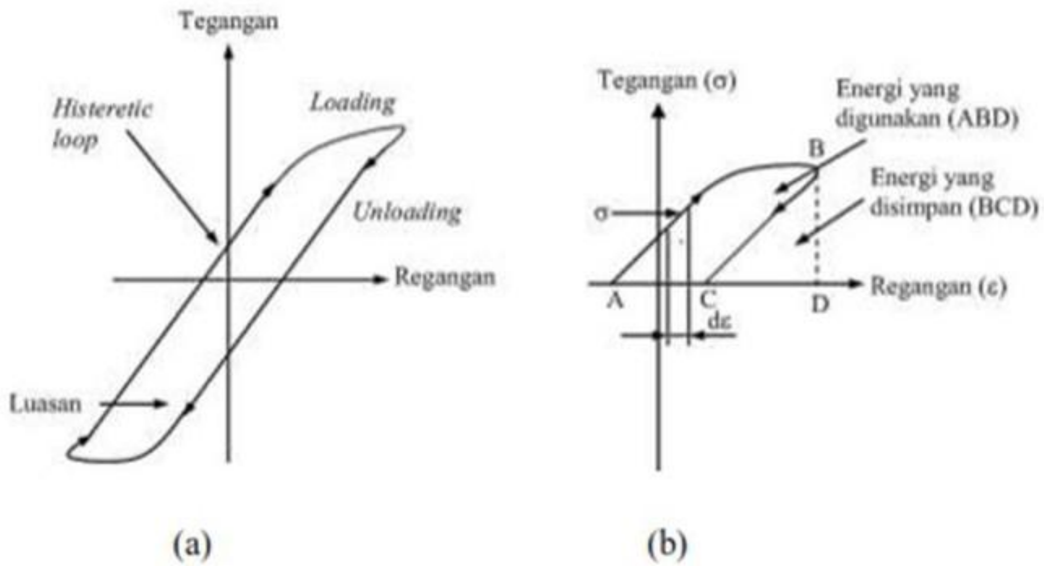
BAB IX
ELEMEN REDAMAN (*DAMPING ELEMENT*)

Dalam beberapa sistem, energi getaran berangsur-angsur diubah menjadi panas atau *sound*. Karena adanya reduksi energi, maka respon getaran seperti simpangan berangsur- angsur akan menurun. Sistem mekanis di mana energi getaran berangsur-angsur diserap menjadi panas dan *sound* dikenal sebagai redaman. Walaupun penyerapan energi ini relatif kecil namun mempertimbangkan redaman tetap penting untuk ketepatan perhitungan respon getaran sistem. Peredam berfungsi sebagai gaya bila ada kecepatan relatif di antara dua ujung peredam. Peredam bisa dimodelkan sebagai salah satu atau lebih dari tipe-tipe berikut

Viscous Damping*. *Viscous *damping* adalah yang paling umum digunakan sebagai redaman mekanis dalam analisis getaran. Bila sistem mekanis digetarkan di medium fluida, seperti udara, gas, air dan oli akan terjadi tahanan bodi oleh fluida sebab energi sistem diserap. Dalam hal ini besarnya penyerapan tergantung pada beberapa faktor, seperti ukuran dan bentuk bodi getaran, viskositas fluida, dan kecepatan bodi yang bergetar. Gaya redaman sebanding dengan kecepatan bodi yang bergetar. Contoh tipe *viscous damping* adalah selaput fluida di antara permukaan yang bergesekan, aliran fluida di sekeliling piston dalam silinder, aliran fluida yang melewati orifis dan selaput fluida di sekitar *jurnal bearing*.

***Coulomb* atau Redaman Gesekan**. Di sini besarnya gaya redaman adalah konstan tetapi arahnya berlawanan dengan bodi yang bergetar. Redaman ini disebabkan oleh gesekan antara bidang gesekan yang kering atau mempunyai pelumas diantaranya.

Material atau *Solid* atau *Hysteretic* Redaman. Ketika material terdeformasi, energidiserap oleh material. Hal ini disebabkan gesekan antara *internal planes*, yang slip atau bergeser karena deformasi. Bila bodi mempunyai material redaman, diagram tegangan regangan ditunjukkan oleh *hysteretic loop* seperti pada Gambar 1.18(a). Luas loop ini merupakan energi yang hilang setiap volume bodi per siklus.



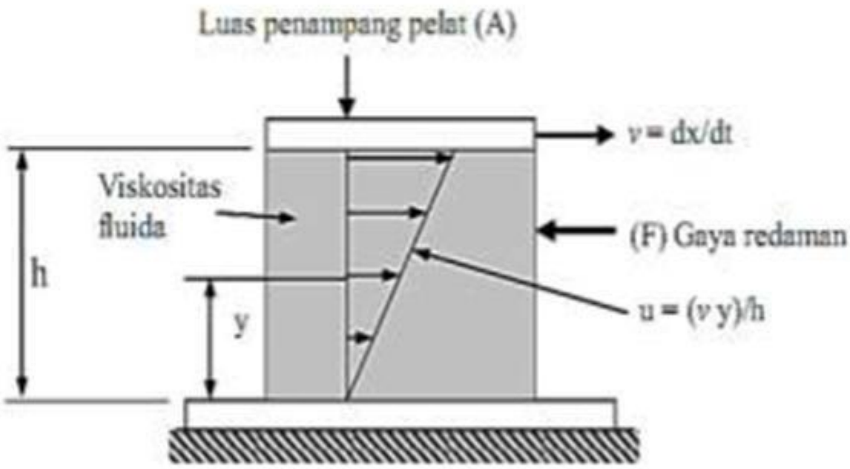
Gambar 8.1. Hysteretic loop pada material elastisGaya pada damper

adalah

$$F = \tau A = \frac{\mu A v}{h} = cv$$ (8.1)

Dimana A adalah luas penampung permukaan yang bergerak, v adalah kecepatan, dan c adalah konstanta redaman yang dihitung dengan persamaa

$$c = \frac{\mu A}{h}$$ (8.2)



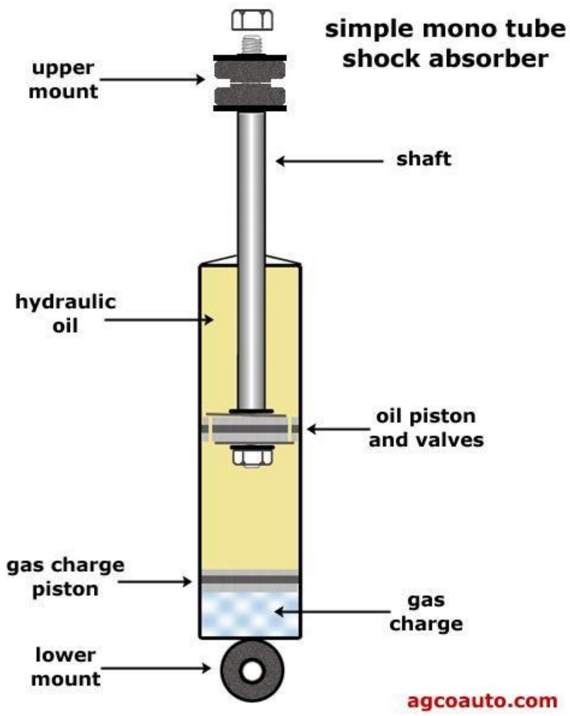
Gambar 8.2. Dua buah plat pararel yang dibatasi oleh fluida

Kombinasi Peredam

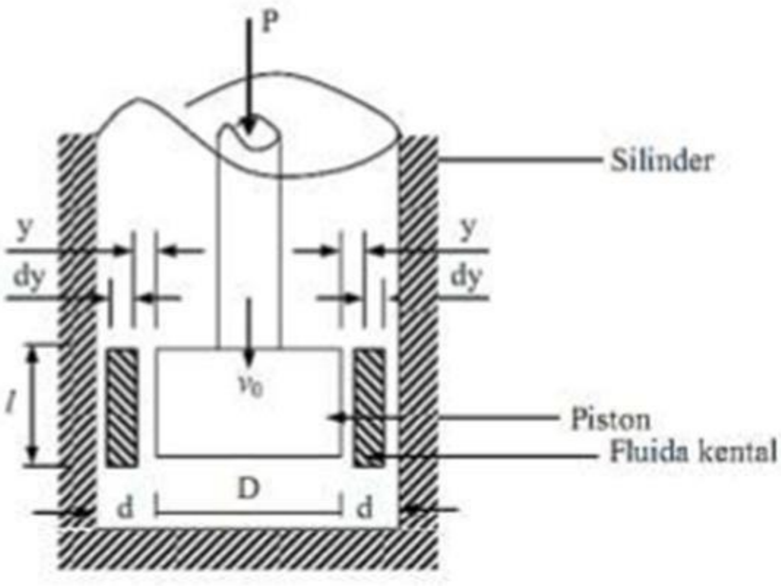
Bila beberapa peredam dipasang secara bersama-sama, maka bisa diganti oleh sebuah peredam ekivalen dengan prosedur sama seperti beberapa pegas yang dipasang secara bersama-sama

Contoh Soal.

1. Tentukan konstanta redaman pada *dashpot* yang terlihat pada Gambar 8.4 di bawah. Diketahui diameter silinder D = 2d, diameter piston = D, kecepatan piston = v, panjang aksial piston = l dan viskositas fluida = μ.



Gambar 8.3. Penampang absorber pada peredam sock breaker.



Gambar 4. Piston silinder pada absorber (redaman)

Penyelesaian:

Seperti pada Gambar 8.4, *dashpot* terdiri dari piston dengan diameter D, panjang *l*, bergerak dengan kecepatan *v* pada silinder dan diberi pelumas dengan viskositasμ. Ruang antara piston dan silinder adalah d. Pada jarak y dari permukaan yang bergerak mempunyai kecepatan dan tegangan geser masing-masing *v* dan t, dan pada jarak (y + dy) mempunyai kecepatan (v – dv) dan tegangan geser (t + d t). Harga negatif untuk kecepatanmenunjukkan bahwa kecepatan akan berkurang dengan bertambahnya y.

Gaya karena kekentalan fluida dapat ditulis sebagai berikut

$$F = \pi\, D\, l\, d\tau = \pi\, D\, l \frac{d\tau}{dy} dy$$

Tegangan geser diberikan oleh

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Maka

$$F = -\pi\, D\, l\, dy\, \mu \frac{d^2v}{dy^2}$$

Tekanan piston pada ujung bawah piston diberikan

$$P = \frac{\mathrm{P}}{\left(\frac{\pi \mathrm{D}^2}{4}\right)} = \frac{4\mathrm{P}}{\pi \mathrm{D}^2}$$

Gaya tekanan di sekitar piston adalah

$$\mathrm{P}(\pi\ \mathrm{D}\ \mathrm{dy}) = \frac{4\mathrm{P}}{\mathrm{D}}\mathrm{dy}$$

dimana (p D dy) menunjukkan luas annular antara y dan (y + dy). Jika diasumsikan kecepatan rata-rata seragam pada arah gerakan pada fluida, maka gaya pada persamaan (E.3) dan (E.5) harus sama, diperoleh

$$\frac{4\mathrm{P}}{\mathrm{D}}\mathrm{dy} = -\pi\ \mathrm{D}\ l\ \mathrm{dy}\ \pi \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{dy}^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{dy}^2} = -\frac{4\mathrm{P}}{\pi \mathrm{D}^2 l \mu}$$

Dengan mengintegrasikan dua kali dan memberikan kondisi batas *v* = - *v*

pada y = 0 dan *v* = 0 pada y = d, kita peroleh

$$v = \frac{2\mathrm{P}}{\pi \mathrm{D}^2 l \mu}(\mathrm{yd} - \mathrm{y}^2) - v_0\left(1 - \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{d}}\right)$$

Debit rata-rata yang melewati ruang antara piston dan silinder dapat diperoleh dengan mengintegrasikan debit fluida yang dipindahkan karena gerakan piston diantara y = 0 dany = d.

$$\mathrm{Q} = \int_0^{\mathrm{d}} \mathrm{v}\ \pi\ \mathrm{D}\ \mathrm{dy} = \left[\frac{2\mathrm{Pd}^2}{6\pi \mathrm{D}^2 l \mu} - \frac{1}{2}\mathrm{v}_0 \mathrm{d}\right]$$

Volume aliran fluida yang melewati ruang antara per detik harus sama dengan volume per detik yang dipindahkan oleh piston. Sehingga kecepatan piston harus sama debit rata-rata fluida dibagi dengan luas piston.

$$\mathrm{v}_0 = \frac{\mathrm{Q}}{\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{D}^2\right)}$$

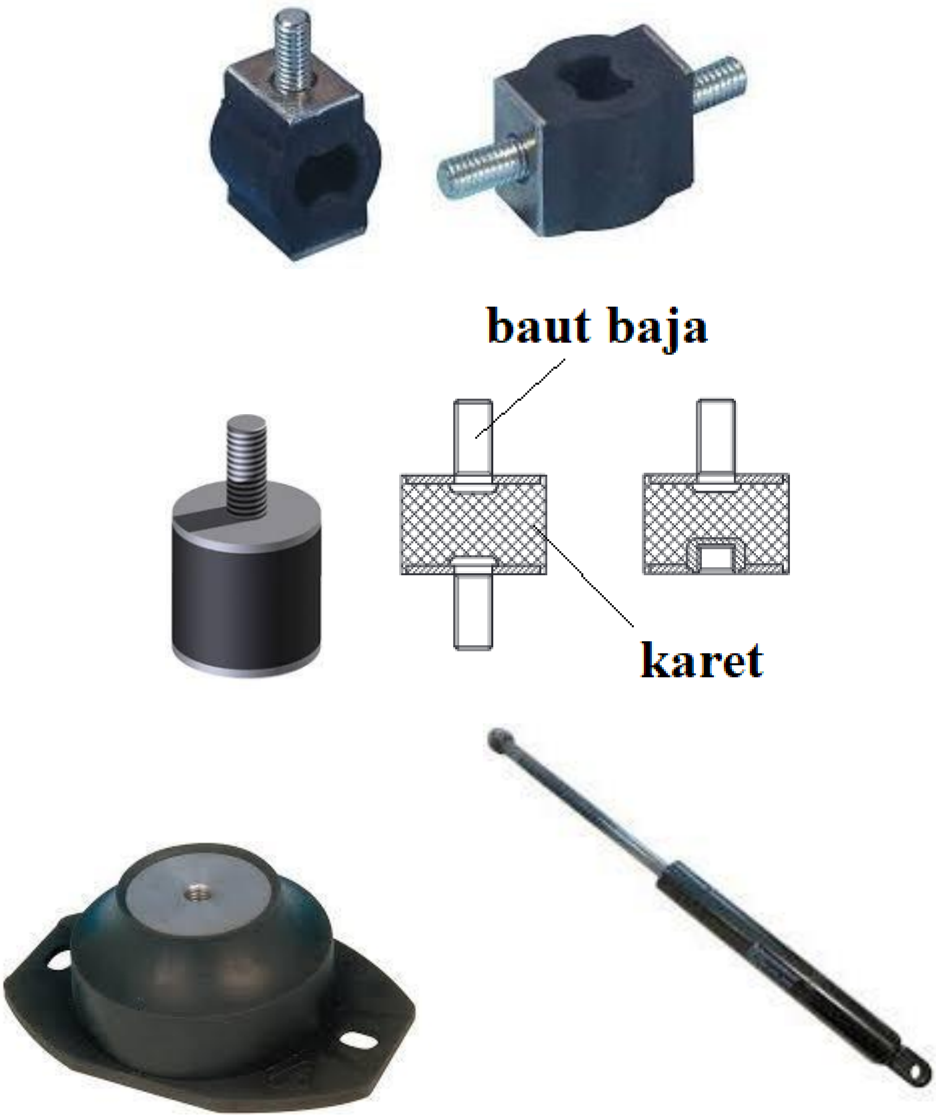
Dengan memasukkan Q pada persamaan tekanan, maka

$$P = \left[\frac{3\pi D^3 l\left(1+\frac{2d}{D}\right)}{4d^3}\right]\mu v_0$$

Persamaan tersebut bisa diganti P = c v dimana c adalah konstanta redaman yang besarnya

$$c = \mu\left[\frac{3\,\pi\, D^3 l\left(1+\frac{2d}{D}\right)}{4d^3}\right]$$

Beberapa contoh element redaman yang terbuat dari karet.



Gambar 8.5. Beberapa contoh element redaman yang terbuat dari karet.

BAB X
ANALISIS PUTARAN POROS DAN GETARAN AKSIAL

Kecepatan berputar kritis juga disebut sebagai kecepatan kritis poros. Putaran kritis didefinisikan sebagai kecepatan dimana poros berputar dengan kecenderungang bergetar keras ke arah melintang jika poros berputar dalam arah horizontal. Dengan kata lain, kecepatan kritis adalah adalah kecepatan dimana terjadi resonansi. Agar mesin-mesinrotodinamik beroperasi dengan aman dan andal, perlu dikontrol getaran di semua kondisi pengoperasian. Getaran yang berlebihan dapat menyebabkan kerusakan komponen kompene dari mesin.

Analisis getaran dapat membantu meminimalkan resonansi yang terjadi, Analisisterhadap getaran dapat membantu menghilangkan risiko kegagalan pada bantalan yang mahal, patah pada poros, atau kerusakan struktural akibat getaran berlebih. Analisa frekuensi alami dan analisa getaran paksa dari getaran aksial dan getaran putaran lateral dapat dilakukan untuk memverifikasi kesesuaian dengan aturan klasifikasi atau standar lainnya, pemilihan komponen untuk fungsionalitas yang dioptimalkan baik untukbangunan baru dan retrofit, studi kelayakan dan konsep desain shafting dan opsi propulsi pada fase desain awal. Maupun optimalisasi operasional dan investigasi kerusakan

Dalam pembahasan tentang osilasi/getaran teredam, ditunjukkan bahwa getaran bebashilang seiring waktu karena energi tersebut terperangkap dalam sistem bergetar atau hilangditangkap oleh redaman. Persamaan getaran untuk perpindahan/amplitudo dalam osilasi teredam adalah seperti Pers. (9.1)

$$x(t) = Ce^{-\delta\omega_n t}.\cos(\omega t) \tag{9.1}$$

dimana

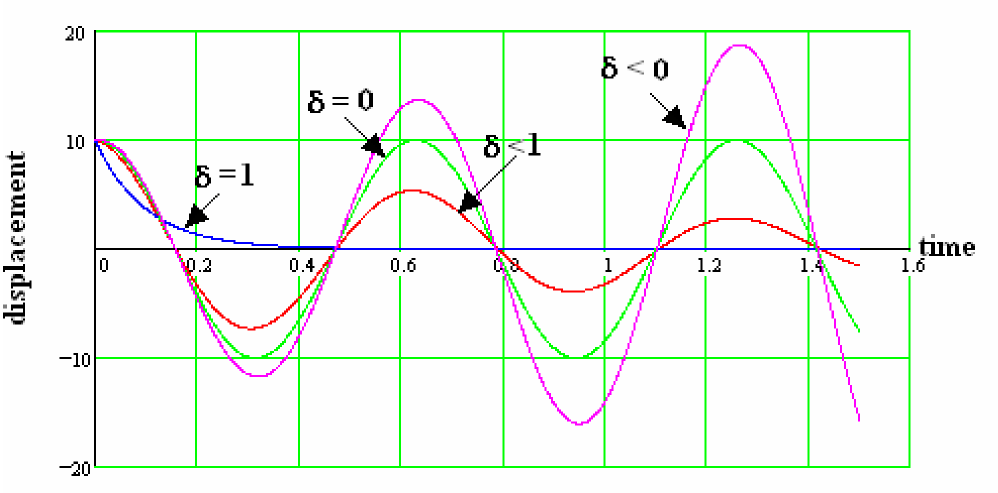
δ = adalah rasio redaman ω_n =

frekuensi sudut alami.

Jika

- $\delta > 1$ kita memiliki sistem over damped.
- $\delta = 1$ kita memiliki osilasi teredam kritis.
- $\delta < 1$ kita memiliki osilasi teredam yang hilang bersama waktu.
- $\delta = 0$ kami memiliki sistem tanpa redaman dan osilasi stabil terjadi

Mungkin dapar disimpulkan dari pola ini bahwa jika δ < 0 kita mendapatkan osilasi yang bertambah seiring waktu seperti pada Gambar 9.1



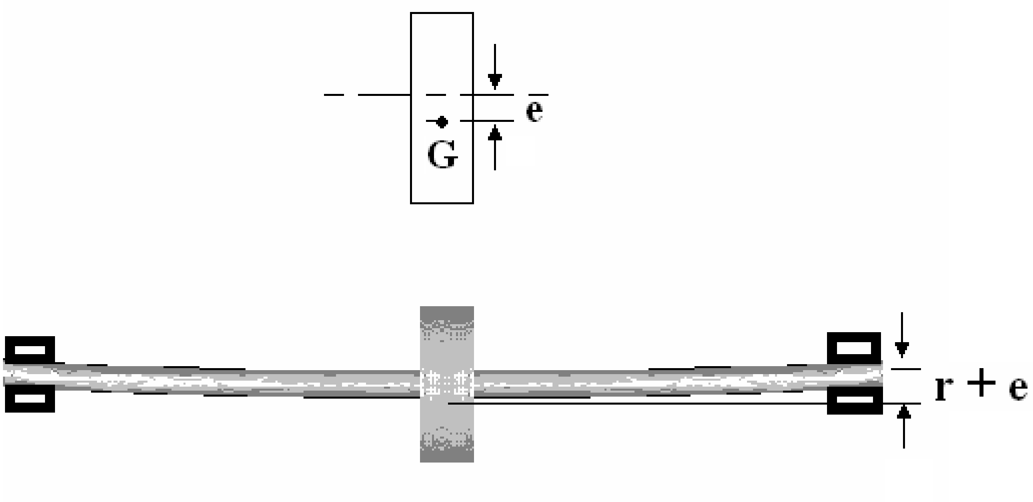
Gamabr 9.1. Grafik displacement untuk setiap kondisi δ

Agar rasio redaman δ menjadi kurang dari nol, yaitu menjadi negatif, kita harus memiliki kebalikan dari redaman, sesuatu yang memasukkan energi ke dalam sistem, bukan mengeluarkan energi. Ketika energi ditambahkan ke sistem, amplitudo terus bertambah. Energi ditambahkan oleh sumber luar dan osilasi semacam itu disebut olisai paksa (*force oscilation*). Sebuah contoh dari osilasi semacam itu adalah seorang anak di ayunan. Jika tidak ada yang mendirong ayunan, gesekan akan membuat ayunan berhenti. Jika seseorang memberi ayunan sedikit dorongan saat dia memulai setiap ayunan, energi ditambahkan ke sistem dan ayunan itu semakin tinggi dan semakin tinggi. Fenomena ini juga dikenal sebagai eksitasi.

Dalam rekayasa, banyak struktur yang cenderung bergetar ketika berada pada atau dekat frekuensi alami. Contohnya adalah apa yang terjadi pada mobil ketika roda tidak seimbang atau ketika berkendara di sepanjang permukaan bergelombang. Jika gangguan mendekati frekuensi alami dari sistem suspensi, kendaraan mungkin terpental tidak terkendali. Kendaraan dilengkapi dengan peredam untuk mencegah hal ini.

Ketika sebuah poros berputar, ada kemungkinan berada atau masuk ke osilasi melintang. Jika poros tidak seimbang, gaya sentrifugal yang dihasilkan akan menyebabkanporos bergetar. Ketika poros berputar pada kecepatan yang sama dengan frekuensi alami osilasi transversal, getaran ini menjadi besar dan muncul sebagai putaran poros. Ini juga

terjadi pada kelipatan dari kecepatan resonansi. Ini bisa sangat merusak mesin-mesin rotodinamik yang berat seperti turbin generator. Sistem harus seimbang untuk mengurangi efek ini dan dirancang untuk memiliki frekuensi alami yang berbeda dengan kecepatan rotasi. Saat memulai atau menghentikan mesin seperti itu, kecepatan kritis harus dihindari untuk mencegah kerusakan pada bantalan dan sudu turbin.



Gambar 9.2. Poros berputar dimana pusat massa tidak berada di sumbu poros

Ketika poros berputar, gaya sentrifugal akan menyebabkannya bending. Jika defleksi poros adalah r, jarak ke pusat gravitasi menjadi r + e. Ketika poros berputar pada kecepatan ω rad/s dan kekakuan transversal adalah k, amaka

→ Karenanya, gaya defleksi adalah F = kt r

→ Gaya sentrifugal adalah Mω2 (r + e)

maka

$$k_t r = M\omega^2(r+e) \quad \text{from which} \quad r = \frac{M\omega^2(r+e)}{k_t} = \frac{M\omega^2 r}{k_t} + \frac{M\omega^2 e}{k_t}$$

$$r = \frac{M\omega^2 e}{k_t\left(1 - \frac{M\omega^2}{k_t}\right)} \quad \text{It has already been shown that} \quad \frac{k_t}{M} = \omega_n^2 \quad r = \frac{\omega^2 e}{\omega_n^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} = \frac{e}{\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right) - 1}$$

(9.2)

Dari sini kita melihat bahwa ketika ωn ω r = e / 0 yang tak terhingga. Ini berarti bahwa tidak peduli seberapa kecil jarak ketidakseimbangan e, poros akan berputar pada frekuensi alami. Balancing memang membantu tetapi tidak pernah sempurna sehingga harus dihindari. Frekuensi dimana putaran terjadi dihitung dengan metode yang sama seperti untuk getaran melintang balok.

Poros dengan ujung bebas berputar normal ke sumbu (mis. Bantalan pelurusan sendiri)

(9.3)

dimana n adalah mode dan harus berupa bilangan bulat 1, 2, 3 ......

Poros dengan bantalan tetap atau chuck

Kecepatan kritis terendah adalah

dan kecepatan kritis yang lebih tinggi diberikan oleh

dimana n = 2, 3,…......(kecepatan terendah terjadi bila n = 1)

Canttilever

Kecepatan kritis terendah

Dimana n = 2, 3,…..(kecepatan terendah terjadi bila n = 1)

Contoh soal

Sebuah poros berdiameter 30 mm dengan panjang 4 m dianggap simple beam. Density material 7,930 kg/m3, E = 205 GPa. Hitunglah ketiga frekewensi pertamanya

Peneyelesaian:

→ Berat poros (*weight*) setiap meternya

→ Momen Inersia poros

→ Selanjutnya hitung frekwensi pertama (terendah)

→ Frekwensi kedua dan ketigaf_2

$= 3,77 \times 2^2 = 15.1$ rev/s

$f_3 = 3,77 \times 3^2 = 33,9$ rev/s

Pada sebuah poros ringan terpasang sebuah pulley ditengah tengah dan pisat berat terletak pada sumbu poros. Poros ditopong oleh *self aligning bearing* di kedua ujungnya. Poros mengalami defeksi 0,5 mm akibat berat statis poros. Hitunglah kecepatan kritis terendah poros

Penyelesaian:

→ Frekwensi poros

→ Kecepatan kritis = 60 x 22,3 = 1338 rev/min

Poros pada soal no.2 memiliki beban merata 40 N/m dan kedua bantalan berjarak 1,2 m. Kekakuan flektural poros (EI) adalah 4500 N/m^2. Berapahkah kecepatan kritis poros?

Penyelesaian:

→ Frekwensi poros akibat beban merata

→ Kecepatan kritis

N = 1140 rev/min (rpm)

Kawat baja berdiameter 2 mm dipasang pada dua buah chuck yang berjarak 1 m. Kawat memiliki berat 0,241 N/m. Kekakuan flektural 0,157 N/m2. Hitunglah putaran kritis ke-1 dan ke-2

Penyelesaian:

→ Frekwensi terendah (ke-1) akibat berat terditribusinya adalah

→ Putaran kritis ke-1

→ Frekwensi ke-2

→ Putaran kritis ke-2

Latihan Soal

Sebuah poros berdiameter 30 mm terbuat dari Baja dengan density 7830 kg/m3. Poros terpasang pada dua buah selg aligning bearing berjarak 2.2 m. Modulus elastisitas baja 200 GN/m2. Hitunglah

Berat poros per meter (54,3 N/m)

Kecepatan kritis terendah poros (738 rev/min)

Kecepatan kritis poros jika terjadi defleksi 1,5 mm akibat pulley di tengah tengah poros (760 rev/min)

Batang berdiameter 5 mm ditahan kedua ujungnya dengan chuck yang berjarak 0.8 m. Berat batang 1,508 N/m dan kekakuan flektural EI = 6,136 N/m2. Hitungah kecepatan kritis ke 1 dan ke 2 (2110 rev/min dan 5815 rev/min)

Sebuah poros yang dianggap sebagai *simply supported* memiliki diameter 50 mm dan panjang 8 m. Density 7.830 kg/m3, E = 205 GPa. Hitunglah frekwensi kritis ke1, 2, dan 3 (1,571 ; 6,279 ; 13,13 Hz)

Batang aluminium salah satu ujungnya pada chuck dan ujung lainnya bebas. Diameter dan panjang batang adalah 12 mm dan 400 mm. Density aluminium 2710kg/m3 dan modulus elastisitas 71 GPa. Hotunhlah kecepatan kritis ke 1 dan ke 2 (3253 rev/min dan 20350 rev/min)

DAFTAR PUSTAKA

Grant R. Fowles; George L. Cassiday (2005). *Analytical Mechanics (7th Ed.)*. Thomson Brooks/Cole

"Simple Harmonic Motion – Concepts"

https://www.webassign.net/question_assets/ncsucal

Thornton, Stephen T.; Marion, Jerry B. (2003). *Classical Dynamics of Particles and Systems (5th Ed.)*. Brooks Cole

Walker, Jearl (2011). *Principles of Physics* (9th Ed.). Hoboken, N.J.: Wiley. ISBN 0-470- 56158-0. John R Taylor (2005). Classical Mechanics. University Science Books.

S. Graham Kelly (2011), *Mechanical Vibrations: Theory and Applications* 1st Edition, Publisher : Cengage Learning.

Michel Lalanne, Patrick Berthier, Johan Der Hagopian (2008), *Mechanical Vibrations for Engineers*, John Wiley and Sons

Didik Nurhadiyanto (2015), *Getaran Struktur*, Penerbit K-Media Perum Pondok Indah Banguntapan, Blok B-15 Potorono, Banguntapan, Bantul. Yogyakarta

Erwin Kreyszig (2011), *Advanced Engineering Mathematics*, 10st Edition Publisher Wiley